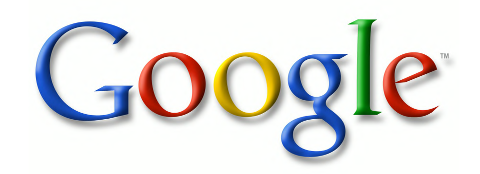
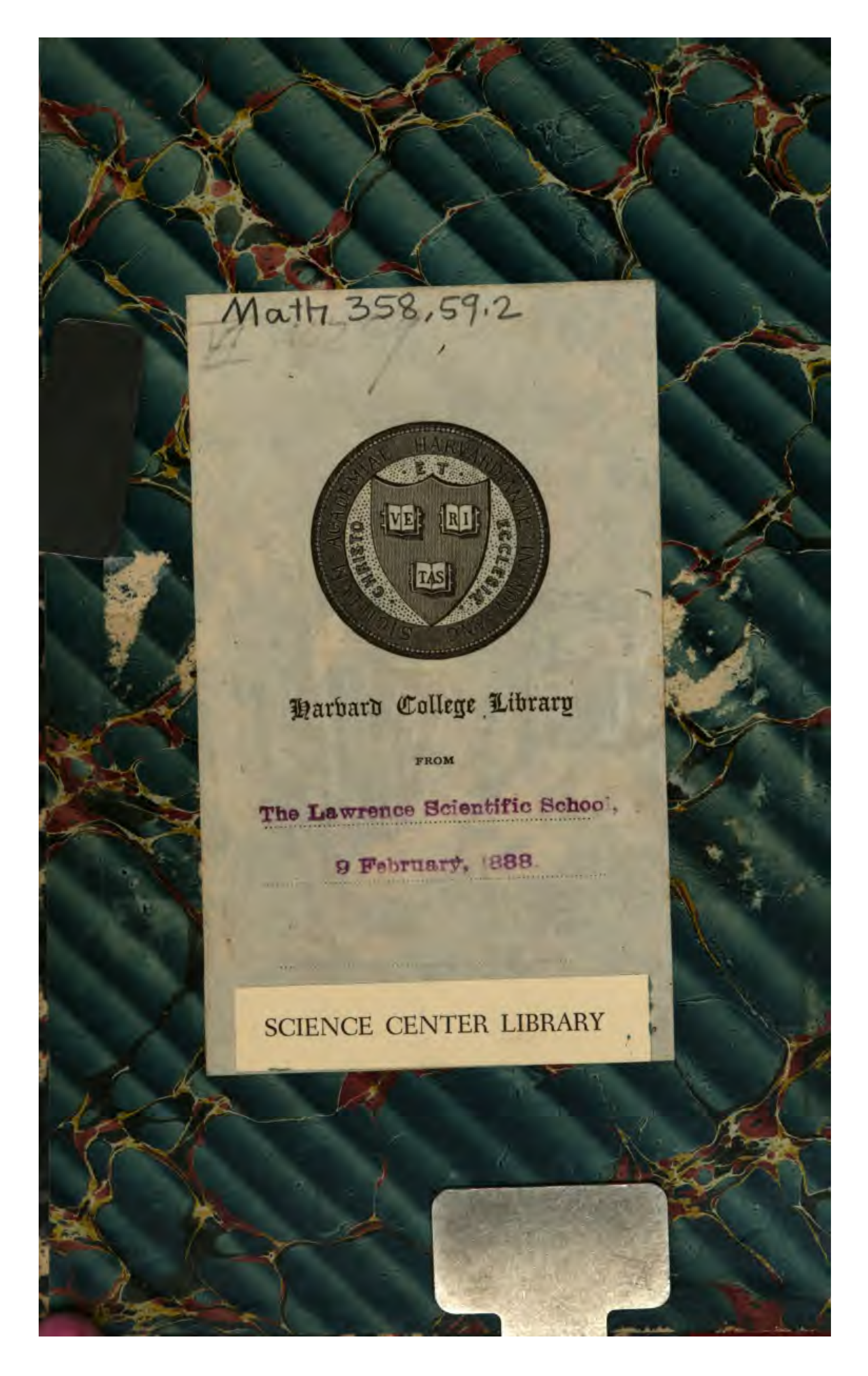
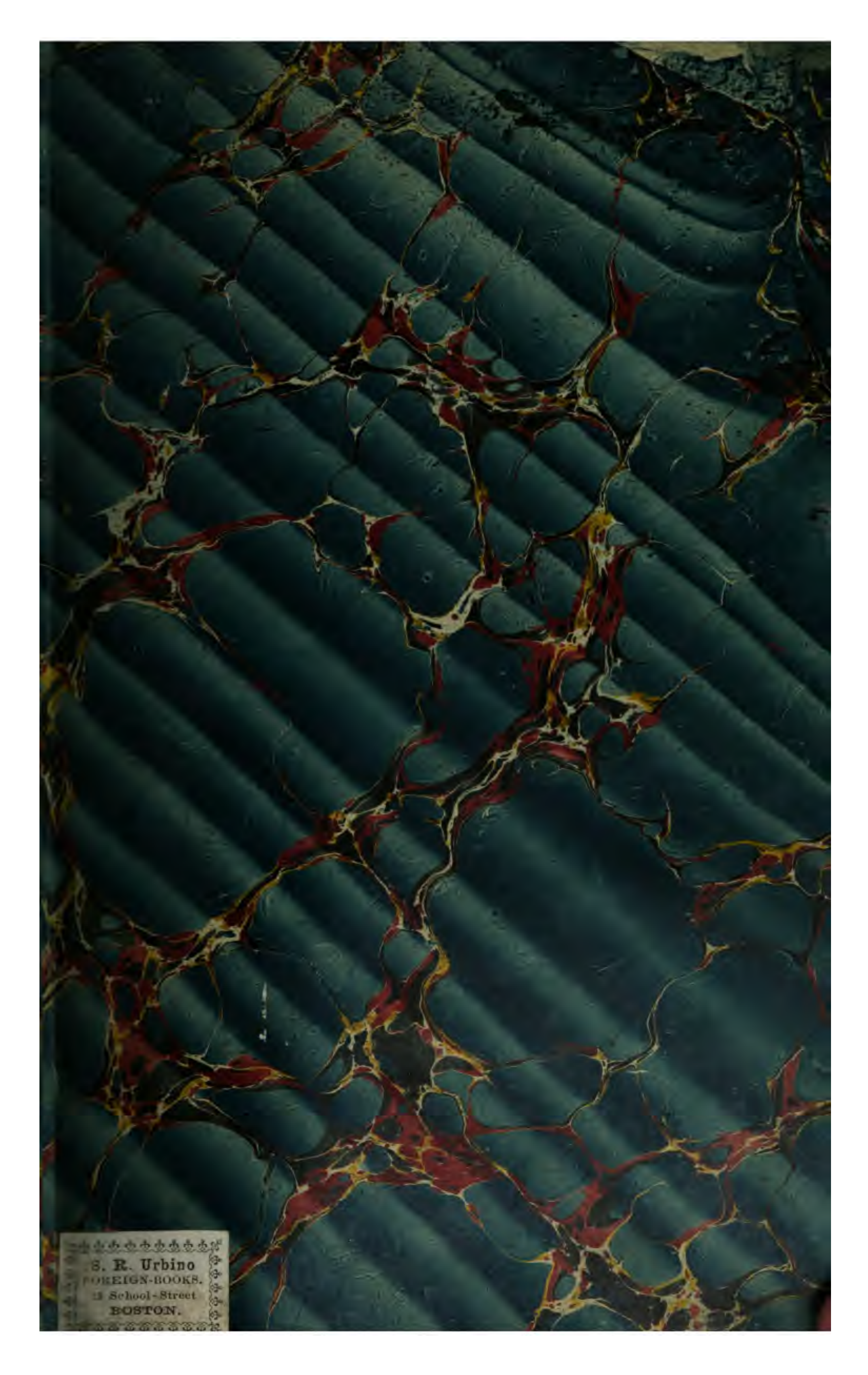






S. R. Urbino
FOREIGN-BOOKS.
School-Street
BOSTON.

12/65
JLF

Fink

RÉSUMÉ DE LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

ET DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS.—IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

RÉSUMÉ DE LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

ET DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

COMPRENANT

Sur la Trigonométrie, sur l'Expression des lieux géométriques par leurs équations, sur le Calcul différentiel et sur le Calcul intégral, l'exposition des connaissances nécessaires aux Ingénieurs pour l'intelligence de la Mécanique rationnelle, de l'Hydraulique et de la Théorie dynamique des Machines.

Jean Baptiste [illegible]

PAR J.-B. BELANGER,

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'Ecole impériale Polytechnique et à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures.

SECONDE ÉDITION.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1859

Extrait de l'Avant-Propos de la première édition (1842).

Les connaissances mathématiques exigées jusqu'à présent pour l'admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures se bornant à l'Arithmétique, à la Géométrie élémentaire et à une partie de l'Algèbre, les leçons dont nous publions le résumé ont pour objet de compléter l'instruction des élèves sur les Mathématiques pures, jusqu'au point nécessaire pour les mettre en état de suivre utilement les cours de Mécanique rationnelle, d'Hydraulique et de Théorie dynamique des Machines, qui entrent, avec les autres sciences applicables à l'industrie, dans le cadre de l'enseignement de l'École Centrale.

Ce cours préparatoire de Mathématiques supérieures s'élève, par quelques-uns des sujets qu'il traite, au delà de l'enseignement actuel des colléges universitaires ; cependant son peu d'étendue est tel, qu'il n'exige des élèves auxquels il est destiné que quatre ou cinq mois d'études. Ainsi le voulait le plan d'enseignement de l'École Centrale des Arts et Manufactures, et cette condition, nous avons tâché de la remplir, non en sacrifiant dans les démonstrations la logique sévère sans laquelle les Mathématiques deviennent une demi-science souvent trompeuse, non en compromettant la clarté par une excessive concision, mais en choisissant dans la Géométrie analytique et dans le Calcul infinitésimal les parties que tout ingénieur instruit doit posséder, et notamment celles qui sont nécessaires à l'étude de la Mécanique considérée au point de vue de son utilité pratique dans la direction des travaux de l'industrie. Nous avons passé sous silence une foule de recherches qui offrent sans doute un très-vif intérêt aux esprits entraînés par leur nature à faire des Mathématiques leur occupation principale, mais qui ne laissent bientôt plus de traces dans le souvenir des hommes voués à la vie active des ateliers et des affaires.

D'ailleurs, quel que soit le but qu'on se propose en étudiant les Mathématiques, nous avons depuis longtemps reconnu que l'ordre le plus convenable à suivre n'est pas d'épuiser successivement et séparément chacune des branches qui composent cet ensemble de connaissances. Ces sciences n'ont pas été ainsi créées et ne doivent pas être apprises indépendamment les unes des autres. De même que le commençant, dès qu'il s'est familiarisé avec les combinaisons les plus ordinaires du Calcul numérique, doit passer simultanément aux élé-

ments de l'Algèbre et de la Géométrie, qui se prêtent un mutuel secours, et qui, dans leurs applications, présentent de nombreuses et intéressantes occasions de revenir aux procédés de l'Arithmétique; de même, si l'on se propose d'approfondir l'Algèbre et la Géométrie, la marche la plus attrayante et la plus lumineuse est de s'initier préalablement à la Géométrie analytique et au Calcul infinitésimal, dont l'une, éminemment propre à faire comprendre la signification et la portée des quantités négatives, enseigne en outre à voir dans les équations algébriques l'expression des lieux géométriques, et l'autre fournit sur la détermination des tangentes, des aires et des volumes les notions les plus claires et les procédés les plus généraux.

C'est d'après ces considérations que nous croyons avoir lieu d'espérer que ce petit ouvrage pourra être utile, non-seulement aux personnes pour qui il sera, comme pour les élèves de l'École Centrale des Arts et Manufactures, une introduction mathématique au cours de Mécanique rationnelle de cette École, mais encore aux jeunes gens qui, appelés à faire une étude complète de la Géométrie analytique et du Calcul infinitésimal, voudront en voir les parties les plus essentielles réduites à une grande simplicité avant d'entreprendre la lecture des ouvrages spéciaux, où les mêmes sujets sont traités avec de grands et curieux développements.

L'auteur d'un Traité aussi élémentaire sur des objets depuis si longtemps connus ne peut prétendre au mérite de l'invention. L'idée de prendre la théorie des projections pour fondement de la Trigonométrie découle naturellement de l'usage qu'on fait des formules trigonométriques dans la Mécanique analytique. M. Coriolis l'avait d'ailleurs énoncé avant nous, et nous n'avons probablement fait qu'obéir à son inspiration en traitant complétement la Trigonométrie sous ce point de vue nouveau, qui écarte toute difficulté relative aux définitions et aux signes des rapports communément appelés lignes trigonométriques, et qui offre l'avantage d'une grande généralité dans les démonstrations aisément étendues à des angles de grandeurs et de signes quelconques.

NOTE SUR LA PRÉSENTE ÉDITION.

Les deux premiers Chapitres contiennent, en sus de ce qu'exige sur la Trigonométrie et la Géométrie analytique le nouveau Programme d'admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures, quelques articles que les élèves feront bien de lire attentivement, non pour

être en état de les reproduire devant un examinateur, mais pour les bien comprendre et s'exercer à l'art d'appliquer le calcul algébrique à la Géométrie. Ils verront notamment, pages 45 et suivantes, que les formules essentielles de la Trigonométrie sphérique ne sont que la traduction en équations des constructions enseignées dans les Traités de Géométrie descriptive au sujet des problèmes relatifs aux faces et aux angles dièdres des angles trièdres.

Au troisième Chapitre nous avons ajouté une exposition succincte des notions les plus importantes sur l'emploi des séries; et en développant un peu plus que nous ne l'avions fait dans la première édition les applications du Calcul différentiel, nous avons employé un petit nombre de pages aux questions qui concernent les tangentes aux lignes courbes dans l'espace et le plan tangent en un point donné d'une surface exprimée par son équation.

Nous appelons l'attention des lecteurs sur un détail typographique qui, sans être bien important, a cependant son utilité. Toutes les fois qu'une quantité qui entre dans une formule ou une équation est représentée par une seule lettre, minuscule ou majuscule de l'alphabet ordinaire, cette lettre est en caractère italique; et les caractères romains sont réservés aux notations qui remplacent des mots. Telles sont les notations

$$\mathrm{log},\quad \mathrm{sin},\quad \mathrm{d},\quad \mathrm{F}\ \text{ou}\ \mathrm{f},$$

qui sont les abrégés de « logarithme de, sinus de, différentielle de, fonction F ou f de », et ne signifient point elles-mêmes des quantités. Nous écrivons donc

$$\log A\quad \text{ou}\quad \log a,\quad \sin b,\quad \mathrm{d}x,\quad \mathrm{F}(x),\quad \mathrm{f}(x,y).$$

Par analogie, si nous avons à désigner une ligne par les deux lettres écrites à ses extrémités, ces lettres, dont ni l'une ni l'autre ne représente une quantité, sont, majuscules ou minuscules, en caractères romains.

Nous ne faisons d'exception que pour les angles d'un triangle qui, bien qu'étant des quantités, sont désignés suivant l'usage par les lettres romaines écrites dans la figure aux trois sommets. Pour nous l'expression sin A est l'abrégé de « sinus de l'angle dont le sommet est le point A ».

Chaque figure des planches placées à la fin du volume porte un numéro d'ordre, et un renvoi, en chiffres plus petits, à l'article auquel cette figure s'applique.

ERRATA.

PAGE.	LIGNE.	AU LIEU DE :	LISEZ :
4	11	parcourue,	parcourue;
8	32	fig. 2	fig. 3
9	8	l'abscisse x... est positive	l'ordonnée y... est négative
	9	négatives	positives
	15	fig. 2	fig. 3
14	29	après être	étant
44	7	$\frac{1}{2}$ (A + B	$\frac{1}{2}$ (A + B)
53	12	cot B	cot A
56	18	$\sin^{A}$	$\sin \frac{A}{2}$
72	20	in x	$c \sin x$
73	2 et 3	$\frac{\sin\ldots}{\sin\ldots}$	$\frac{\text{tang}\ldots}{\text{tang}\ldots}$
78	30	met	meut
85	13	coordonnées	ordonnées
86	16	de	du
92	23	$= A$	$= a$
94	8	$\pm(p - 2a)$	$p - 2a$
	10	$(x - c)$	$(x - c)^2$
98	10	$x = a$	$x^2 = a^2$ ou $x = \pm a$
	»	$x < a$	$x^2 < a^2$
	11	$x > a$	$x^2 > a^2$
101	6	OF $\frac{p}{2}$	$OF = \frac{p}{2}$
	23	114	128
102	15	$\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a} x^2$
103	6	118	119
106	15	$\frac{A'B}{A'S}$	$\frac{A'B'}{A'S}$ égale à $\frac{AR}{BS}$
114	9	$h_2 - h_2$	$h_2 - h_1$
120	5	$y - x + =$	$y - x =$
125	19	170	160
127	8	la formule	la formule rappelée
132	26	$2(BD - 2AE)$	$2(BD - 2AE)x$
139	21	Oy	Oz
142	12	174	175
148	21	Ox	Ox'
226	13	sous-tangente	sous-normale
270	2	$\frac{1}{3} FC^2 -$	$\frac{1}{3} (FC^2 -$
296	15	lette	lettre

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

TRIGONOMÉTRIE.

Pages.

§ I. Généralités sur les projections exprimées algébriquement. 2

Position d'un point sur une ligne donnée, — dans un plan donné, — dans l'espace. — Projection d'un contour polygonal sur des axes coordonnés.

§ II. Expression de la direction d'une droite. — Lignes trigonométriques.. 13

Origine, longueur et direction d'une droite. — Direction définie par un angle et un signe. — Expression d'un angle par ses lignes trigonométriques. — Direction d'une droite hors des plans coordonnés.

§ III. Expression trigonométrique de la projection orthogonale d'une droite ou d'un contour polygonal sur un axe......... 26

Théorème général à ce sujet. — Angle de deux droites faisant avec trois axes rectangulaires des angles donnés.

§ IV. Formules de trigonométrie plane.................... 30

Formules de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$. — Formules de $\tan g(a \pm b)$, de $\sin p \pm \sin q$ et $\cos p \pm \cos q$ sous forme de produits.

§ V. Résolution des triangles rectilignes.................. 40

Triangles rectangles. — Triangles obliquangles. — Aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés.

§ VI. Trigonométrie sphérique............................ 45

Relation fondamentale entre les trois côtés et un angle. — Relation entre deux côtés et les angles opposés. — Relation entre deux côtés, l'angle compris et un autre angle. — Triangles ou trièdres supplémentaires. — Relation entre les trois angles et un côté. — Résolution des triangles sphériques. — Formules de Delambre et de Néper.

§ VII. Usage des Tables de logarithmes. — Types de calculs... 60

§ VIII. Problèmes divers de trigonométrie.................. 71

Table des nombres trigonométriques naturels.......... 75

CHAPITRE II.

EXPRESSIONS DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES PAR LEURS ÉQUATIONS.

Pages.

§ I. Généralités sur ce sujet 76

Coordonnées parallèles à des axes concourants. — Coordonnées polaires. — Coordonnées focales.

§ II. De la ligne droite 83

Coefficient angulaire. — Problèmes sur les lignes droites.

§ III. Du cercle 89

Équation du cercle rapportée à deux axes rectangulaires.

§ IV. Équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole déduites des propriétés focales de ces courbes 92

Autres propriétés déduites des équations. — Cordes supplémentaires et diamètres conjugués de l'ellipse. — Asymptotes de l'hyperbole. — Analogie des trois courbes par leurs équations, — par le rapport constant des distances à un foyer et à une directrice, — comme sections coniques.

§ V. Propriétés des courbes paraboliques et hyperboliques.... 107

Parabole rapportée à des coordonnées obliques. — Notions du calcul des différences finies. — Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

§ VI. De quelques courbes transcendantes 122

Logarithmique, — sinusoïde, — cycloïde, — spirale d'Archimède.

§ VII. Transformation des coordonnées appliquée aux courbes du second dégré 125

Réduction de l'équation générale du second degré aux formes les plus simples. — Des diamètres des courbes du second degré.

§ VIII. Équations de la ligne droite hors des plans coordonnés... 135

Problèmes à ce sujet.

§ IX. Équation du plan rapporté à trois autres plans coordonnés 139

Cette équation est du premier degré. — Droite perpendiculaire à un plan.

§ X. Transformation des coordonnées parallèles à trois axes, appliquée aux surfaces du second degré 144

Pages.

§ XI. Classification des surfaces du second degré 152

Surfaces à centre : ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes. — Surfaces dénuées de centre : paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique.

§ XII. Plans diamétraux et diamètres des surfaces du second degré. Similitude des sections parallèles 161

§ XIII. De quelques propriétés des surfaces du second degré... 167

Génération des surfaces réglées du second degré. — Intersections planes des surfaces du second degré.

CHAPITRE III.

NOTIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

§ I. Problème général des tangentes. Solutions dans les cas où la courbe peut être exprimée par une équation du premier degré en coordonnées polaires, focales, etc. 173

Tangente à l'ellipse. — Tangente à la spirale d'Archimède, — à la cycloïde.

§ II. Détermination de la tangente d'après l'équation de la courbe. 177

Différentielles. — Dérivées.

§ III. Différentiation des fonctions fondamentales 182

Différentielles de x^m et de $\frac{1}{x}$. — Différentielle de $\log x$. — Différentielle de $\sin x$.

§ IV. Théorèmes et règles pour différentier toutes les fonctions à l'aide des différentielles fondamentales 188

Différentiation des fonctions de fonction. — Différentiation des fonctions composées. — Différentiation des fonctions implicites.

§ V. Formules de différentielles obtenues par les règles précédentes 198

Fonctions simples x^m, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$, et leurs inverses $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, etc. — Exemples de différentiation.

§ VI. Des dérivées et différentielles de divers ordres des fonctions d'une variable. Exemples de leur emploi 204

Dérivées successives d'une fonction. — Sens de la concavité des courbes. — Points d'inflexion. — Maximums et minimums. — Valeurs particulières qui se présentent sous les formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. — Développement des fonctions en séries. — Série de Taylor.

Pages.

§ VII. Applications du calcul différentiel aux lignes et aux surfaces courbes........ 219

Courbes planes : tangente, sous-tangente, sous-normale. — Rayons et centres de courbure des courbes planes. — Tangentes aux courbes dans l'espace. — Plan tangent à une surface. — Plan tangent à l'ellipsoïde, — sa distance au centre.

CHAPITRE IV.

NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL.

§ I. Considérations fondamentales........ 231

Intégrale indéfinie. — D'où vient cette dénomination. — Quadrature des courbes. — Cubature des solides terminés par des surfaces courbes.

§ II. Théorèmes principaux pour l'intégration des fonctions d'une seule variable........ 241

Constante arbitraire. — Intégrale d'une somme de différentielles. — Facteur constant. — Intégrale de la différentielle d'une fonction de fonction. — Intégration par parties.

§ III. Formules d'intégrales directes ou obtenues par les règles précédentes........ 245

§ IV. Intégration des équations différentielles........ 252

§ V. Quadrature par approximation........ 254

Formule de Thomas Simpson. — Intégration par série. — Calcul de π.

CHAPITRE V.

APPLICATION DU CALCUL INFINITÉSIMAL A LA RECHERCHE DES CENTRES DE GRAVITÉ ET DES MOMENTS D'INERTIE.

§ I. Définition du centre de gravité d'une ligne, d'une surface ou d'un corps géométrique........ 262

§ II. Centres de gravité des lignes........ 265

§ III. Centres de gravité des surfaces........ 268

§ IV. Centres de gravité des volumes........ 275

§ V. De quelques propriétés des centres de gravité........ 279

§ VI. Moments d'inertie et rayons de gyration des corps géométriques........ 281

DEUX PLANCHES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

RÉSUMÉ DE LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

ET DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

CHAPITRE PREMIER.

TRIGONOMÉTRIE.

---

1. L'objet spécial de la Trigonométrie est de calculer les côtés ou les angles inconnus d'un triangle au moyen de données suffisantes pour les déterminer.

Considérée sous un point de vue plus général, la Trigonométrie fournit le moyen de soumettre au calcul les relations qui existent, dans toute figure suffisamment définie, entre les directions de ses côtés ou diagonales et leurs longueurs ou les autres quantités géométriques qui en dérivent.

Pour établir les formules de la Trigonométrie, nous nous servirons d'un genre de considérations dont l'ensemble peut être appelé *la Théorie de l'expression algébrique des projections*, et dont l'emploi est de la plus grande utilité dans la haute Géométrie et dans la Mécanique mathématique.

§ I. GÉNÉRALITÉS SUR LES PROJECTIONS EXPRIMÉES ALGÉBRIQUEMENT.

1°. Considérations préliminaires sur l'expression algébrique de la position d'un point sur une ligne donnée.

2. Une ligne droite ou courbe d'une longueur indéfinie étant donnée, ainsi que l'un de ses points O (*fig.* 1), deux choses sont nécessaires et suffisantes pour déterminer la situation d'un point M sur cette ligne : 1° *la distance* du point O au point M, mesurée suivant la ligne donnée; 2° *le sens* dans lequel cette distance doit être portée à partir du point O pour obtenir M.

3. *Connaissant, sur une ligne donnée, la situation de chacun des points* M′, M″, *relativement à un point* O, *on demande la situation de* M″ *relativement à* M′, *c'est-à-dire* 1° *la distance de* M′ *à* M″; 2° *le sens de cette distance à partir de* M′.

Pour fixer les idées, distinguons les deux sens dans lesquels on peut parcourir la ligne donnée, en disant que l'un de ces sens va de gauche à droite et l'autre de droite à gauche.

Soient x' et x'' les deux distances OM′, OM″, supposées à droite de O; $x''-x'$ sera la distance cherchée, et, suivant que cette différence sera positive ou négative, le point M″ sera à droite ou à gauche de M′; de sorte que, X désignant la distance cherchée, la formule

$$X = x'' - x' \qquad (1)$$

répondra aux deux parties de la question, si l'on convient que, suivant que $x''-x'$, réduction faite, aura le signe $+$ ou le signe $-$, la distance X doit être portée à droite ou à gauche.

Supposons maintenant M′ et M″ de différents côtés; soit par exemple M″ à $0^m,5$ à droite, et M′ à $0^m,3$ à gauche de O. M″ sera à $0^m,8$ à droite de M′, et ce cas sera encore compris dans la même formule (1), si l'on donne le signe — à la valeur particulière de x' qui doit être portée à gauche; ainsi on pose $x''=0^m,5$ et $x'=-0^m,3$, d'où $X=0^m,8$. Si au contraire c'est M″ qui se trouve à gauche et à $0^m,5$ de O, tandis que M′ est à droite et à $0^m,3$, M″ sera à $0^m,8$ à gauche de M′; et la formule $X=x''-x'$ sera d'accord avec ce résultat si l'on fait $x''=-0^m,5$, $x'=0^m,3$, et qu'on interprète suivant la même convention la valeur qu'on obtient, $X=-0^m,8$.

Enfin, si les deux points M″, M′ sont à gauche de O, les deux cas qui peuvent se présenter sont encore renfermés dans la formule $X=x''-x'$, où les valeurs particulières des distances x'', x', devront être substituées avec le signe —. Exemples :

$$x''=-0^m,3,\ x'=-0^m,5,\ X=-0^m,3+0^m,5=\ 0^m,2,$$
$$x''=-0^m,5,\ x'=-0^m,3,\ X=-0^m,5+0^m,3=-0^m,2.$$

Ainsi les six cas possibles que renferme la question proposée sont résolus par une seule formule au moyen de changements de signes correspondants aux changements de sens des distances x'', x', X.

4. Cette importante propriété de l'Algèbre appliquée à la Géométrie peut se généraliser dans les termes suivants :

Lorsque la distance d'un point à un autre est susceptible d'être portée en deux sens opposés selon les divers cas d'une même question, il suffit de traiter la question algébriquement dans l'hypothèse de l'un des deux sens; et les formules ou équations qu'on obtient conviennent à tous les cas possibles, pourvu que, dans les applications qu'on en fait, on affecte les valeurs particulières de la

distance dont il s'agit du signe + ou du signe —, selon qu'elles sont portées dans le sens adopté dans la mise en équation ou en sens contraire.

Cette règle très-utile, due à Descartes, ne paraît pas pouvoir être démontrée dans toute sa généralité : nous aurons soin de la vérifier dans les questions où nous en ferons usage.

5. Lorsqu'on définit la position d'un ou de plusieurs points sur une droite illimitée, par les distances de ces points à un autre point considéré comme l'*origine* commune des distances, on choisit comme *positif* l'un des deux sens dans lesquels la droite peut être parcourue, et chacune des distances dont il s'agit, étant affectée d'un signe, + ou —, selon le sens dans lequel elle doit être portée à partir de l'origine, s'appelle l'*abscisse* du point auquel elle appartient, relativement à cette origine. Ainsi *l'abscisse d'un point est une quantité algébrique constituée d'une longueur et d'un signe ; et si elle est désignée par x, cette lettre renferme implicitement deux éléments.*

6. D'après cette définition, la formule $X = x'' - x'$ établie au nº 5 s'énonce pour tous les cas possibles en disant que *l'abscisse X d'un point* M″, *relativement à un autre point* M′, *est égale à la différence $x'' - x'$ des abscisses des points* M″ *et* M′, *relativement à une même origine quelconque.*

De cette formule on tire

$$x'' = X + x',$$

c'est-à-dire que *l'abscisse d'un point* M″ *relativement à une origine* O *égale l'abscisse du même point relativement à une autre origine* M′, *plus l'abscisse de cette seconde origine relativement à la première.* Cette proposition, évidente quand les abscisses sont positives, est également vraie dans tous les autres cas.

2°. Position d'un point dans un plan donné, exprimée en coordonnées parallèles à deux axes concourants.

7. Voici le moyen le plus fréquemment employé pour définir la position d'un point M sur un plan. On considère comme données dans ce plan deux droites illimitées P′P, Q′Q (*fig.* 2) concourantes, sur chacune desquelles on adopte un sens pour être le sens positif. Ces droites s'appellent *axes de comparaison* ou *axes coordonnés*. Leurs parties Ox, Oy, qui s'étendent indéfiniment dans le sens positif à partir de l'intersection O, s'appellent les *parties positives* des axes. Cela posé, par le point M on imagine menées parallèlement aux axes deux droites MP, MQ, qui les rencontrent en P et Q; dès lors, pour exprimer la position du point M, il suffit d'exprimer celle des points P et Q, ce qui se fait en énonçant la longueur et le signe de chacune des distances OP, OQ. Ces deux quantités, qu'on pourrait appeler les distances coordonnées du point M, s'appellent simplement les *coordonnées* du point M, et sont désignées d'une manière générale par des lettres italiques correspondantes aux lettres romaines écrites dans la figure sur la partie positive de chaque axe.

Ainsi, pour le point M, situé dans l'angle xOy que forment les parties positives des axes, on a

$$x = + \text{longueur OP}, \quad y = + \text{longueur OQ};$$

pour le point M′, situé dans l'angle P′Oy de la portion négative de l'axe Ox et de la portion positive de l'axe Oy, on a

$$x = - \text{longueur OP}', \quad y = + \text{longueur OQ}.$$

De même pour M″ on a

$$x = - \text{longueur OP}', \quad y = - \text{longueur OQ}',$$

et pour M‴

$$x = + \text{longueur OP}, \quad y = - \text{longueur OQ}'.$$

Les axes coordonnés Ox, Oy, s'appellent souvent, l'un l'axe des x, l'autre l'axe des y. L'intersection O est l'*origine des coordonnées*. Les coordonnées sont dites *rectangulaires* ou *obliques*, selon que l'angle des axes est ou n'est pas droit.

8. Étant données les coordonnées x, y, d'un point M par rapport à deux axes connus, on obtiendra ce point par l'une des deux constructions suivantes :

1°. On peut porter sur les axes les longueurs des coordonnées OP, OQ, chacune dans le sens indiqué par son signe; puis tracer par P et Q, parallèlement aux axes, deux droites qui font avec les axes un parallélogramme et qui se rencontrent au point M.

2°. On peut porter sur l'un des axes celle des deux coordonnées qui s'y rapporte, par exemple OP égale à x sur l'axe Ox, dans le sens indiqué par le signe de x; puis par le point P ainsi obtenu mener la droite PM, parallèle au second axe, égale à l'autre coordonnée, et dirigée dans le sens Oy ou dans le sens opposé, suivant que cette coordonnée a le signe + ou le signe —. Dans le cas où le point M est supposé obtenu par cette construction, la première des coordonnées s'appelle *abscisse*, et la seconde s'appelle *ordonnée*.

9. Lorsque les axes sont rectangulaires, les points P et Q sont les *projections orthogonales* ou les *projections* proprement dites du point M sur ces axes. Quand ceux-ci font un angle quelconque, les points P et Q peuvent être appelés les *projections coordonnées* du point M sur les axes.

10. Tous les points de la portion de droite OM ont leurs projections coordonnées entre O et P sur l'axe des x, entre O et Q sur l'axe des y. C'est pourquoi les distances OP, OQ, dont l'étendue et le sens sont exprimés par les grandeurs

et les signes de x et de y, sont quelquefois considérées comme les ***projections coordonnées de la droite*** OM sur les axes.

11. En résumé, les quantités x et y, qui servent à définir la position d'un point M dans un plan relativement à deux axes, peuvent être considérées sous quatre aspects; elles expriment en grandeur et en direction :

1°. Les distances de l'origine O aux projections coordonnées P, Q, du point M;

2°. Les distances des projections coordonnées Q, P, au point M;

3°. Les projections coordonnées de la droite OM sur les deux axes;

4°. Les deux côtés contigus d'un parallélogramme dont la droite OM est la diagonale partant du sommet commun.

12. Lorsque les axes Ox, Oy, sont rectangulaires, les coordonnées x, y, du point M dans leur plan sont égales aux distances de ce point aux deux axes. Il existe entre elles et la distance OM, que nous désignerons par u, la relation

$$x^2+y^2=u^2,$$

qui résulte de chacun des triangles rectangles OMP, OMQ.

3°. Position d'un point dans l'espace, exprimée en coordonnées parallèles à trois axes concourants.

13. La position d'un point M dans l'espace s'exprime par un moyen analogue à celui qui vient d'être exposé. On considère comme données trois droites illimitées Ox, Oy, Oz (*fig.* 3), qui se coupent en un même point O et ne sont pas situées dans un même plan. Ces droites s'appellent *axes coordonnés,* et les trois plans qui passent par les axes, pris deux à deux, s'appellent *plans de comparaison* ou *plans*

coordonnés. Par le point M on imagine menés parallèlement aux plans coordonnés trois plans qui rencontrent les trois axes en P, Q, R. (La figure s'exécute en remarquant que les intersections des six plans forment les arêtes d'un parallélipipède.) Or on voit que, pour exprimer la position du point M, il suffit d'exprimer celle des points P, Q, R, ce qui se fait en énonçant la longueur et le signe de chacune des distances OP, OQ, OR. Ces trois quantités algébriques s'appellent les *coordonnées* du point M pour le système d'axes dont il s'agit; elles sont désignées en général par des lettres italiques correspondantes aux lettres romaines écrites dans la figure sur la partie positive de chaque axe; le plus souvent ces lettres sont x, y, z, et les axes s'appellent *axes des x, des y, des z*.

14. Connaissant la longueur et le signe (et par conséquent le sens) des trois coordonnées x, y, z, d'un point M par rapport à trois axes donnés, on peut considérer sous deux points de vue la détermination de ce point :

1°. Les valeurs de x, y, z, déterminent les points P, Q, R, et les trois plans menés par ces points parallèlement aux plans coordonnés ont pour unique point commun le point M.

2°. En considérant les douze arêtes du parallélipipède OM formé par les trois plans coordonnés et par les trois plans qui leur sont parallèles, on voit qu'en partant du point O pour arriver à M, en suivant trois arêtes consécutives de ce parallélipipède, on peut y arriver par six chemins différemment situés, mais de même étendue, tous composés de trois chemins rectilignes respectivement parallèles aux trois axes, et ayant les mêmes sens et les mêmes longueurs que les trois coordonnées. Ces six chemins sont (*fig.* 2) OPCM, OPBM, OQCM, OQAM, ORBM, ORAM. On adopte ordinairement le premier, qui se com-

pose des coordonnées dans l'ordre x, y, z. Ainsi l'on considère le point M comme obtenu en portant x de O en P, puis y de P en C, enfin z de C en M.

La première des coordonnées s'appelle alors l'*abscisse* x, la seconde s'appelle l'*ordonnée* y *dans le plan des* x *et* y, la troisième s'appelle l'*ordonnée* z *dans l'espace*.

Dans la *fig.* 4, les coordonnées x, y, z, du point M, sont positives; l'abscisse x, du point M', est positive, et ses deux autres coordonnées sont négatives.

15. Le point C, où la parallèle MC à l'axe des z rencontre le plan des x et y, s'appelle *la projection du point* M *sur le plan des* x *et* y *parallèlement à l'axe directeur* Oz. Ce point C est déterminé par les deux coordonnées x et y, du point M, indépendamment de la grandeur et du signe de la troisième z. De même les points A et B (*fig.* 2) sont les projections analogues sur les deux autres plans coordonnés, et chacun d'eux est défini par deux coordonnées du point M, indépendamment de la troisième.

Si l'axe Oz est perpendiculaire sur le plan xOy, le point C est la projection *orthogonale* de M *sur ce plan*, et la ligne projetante MC est perpendiculaire à ce même plan. Dans tout autre cas, la projection C est dite *oblique*, et dépend de la direction de l'axe Oz.

16. Le point P, dont la position est déterminée par l'abscisse x, et où le plan mené par M parallèlement au plan yOz rencontre l'axe Ox, s'appelle *la projection du point* M *sur l'axe des* x *parallèlement au plan directeur* yOz. Les points Q et R, déterminés respectivement par les coordonnées y et z, sont les projections analogues sur les deux autres axes.

Si le plan yOz est perpendiculaire sur l'axe Ox, le point P est la projection *orthogonale* de M *sur cet axe*, et

la ligne *projetante* MP est perpendiculaire à ce même axe. Si cette condition n'est pas remplie, la projection P est dite *oblique* et dépend de la direction du plan yOz.

17. Les droites OC, OB, OA, sont les *projections coordonnées* de la droite OM *sur les plans coordonnés*. Chacune d'elles est déterminée complétement par deux coordonnées du point M.

Les distances OP, OQ, OR, exprimées par x, y, z, sont les projections coordonnées de la droite OM sur les axes coordonnés.

18. Les coordonnées x, y, z, du point M, peuvent donc être considérées sous quatre aspects :

1°. Comme les distances de l'origine O aux projections coordonnées P, Q, R, du point M sur les axes;

2°. Comme les distances des projections coordonnées A, B, C, sur les plans au point M;

3°. Comme les projections coordonnées de la droite OM sur les trois axes;

4°. Comme les trois côtés contigus d'un parallélipipède dont la droite OM est la diagonale partant du même sommet.

19. Lorsque les axes coordonnés Ox, Oy, Oz, sont *rectangulaires*, les coordonnées x, y, z, d'un point M, sont égales aux *distances de ce point aux trois plans coordonnés*

Dans ce cas, en faisant OM $= u$, on a

$$u^2 = z^2 + \overline{OC}^2, \quad \overline{OC}^2 = x^2 + y^2,$$

d'où

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

4°. Projections d'une droite limitée et d'un contour polygonal sur des axes coordonnés.

20. Si deux points M' et M'' sont projetés en P' et P'', sur l'axe Ox, la distance $P'P''$, prise avec le signe qui convient au sens allant de P' à P'', s'appelle la projection de la droite $M'M''$. L'ordre dans lequel on énonce les points extrêmes M', M'', et leurs projections P', P'', détermine le sens de la projection $P'P''$, d'où résulte le signe que celle-ci doit prendre dans les formules où elle entre. Ainsi, dans le cas de la *fig.* 4, la projection de $M'M''$ est $+$ *longueur* $P'P''$, tandis que la projection de $M''M'$ est — *cette même longueur*.

21. Il résulte de cette définition, et de la discussion du n° 3, que *la projection d'une droite* $M'M''$, *dont les extrémités* M', M'', *ont* x' *et* x'' *pour abscisses sur l'axe de projection, est égale à* $x'' - x'$.

22. D'après cette même définition, on reconnaît aisément l'exactitude de la proposition générale que voici :

THÉORÈME. *Quels que soient l'axe* Ox *de projection et le plan coordonné* yOz, *la somme algébrique des projections des côtés d'un chemin polygonal* $M'\,M''\,M'''\ldots M^{(n)}$, *qui conduit du point* M' *au point* $M^{(n)}$, *est égale à la projection du chemin direct* $M'M^{(n)}$ (*fig.* 5).

En effet, cela est évident si les projections partielles $P'P''$, $P''P'''$,..., sont de même sens et par conséquent de même signe; et si elles sont de sens opposés, chaque projection positive fait avancer le point P de toute sa valeur dans le sens positif, tandis que chaque projection négative le fait reculer de toute sa valeur dans l'autre sens.

On peut démontrer cette proposition algébriquement en s'appuyant sur celle du n° 20.

x', x'', x''',..., $x^{(n)}$, étant les abscisses des points M',

M'', M''', ..., $M^{(n)}$, sur l'axe de projection, on aura en général, eu égard aux signes :

$$\text{Projection de } M'M'' = x'' - x'$$
$$\text{Projection de } M''M''' = x''' - x'',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{Projection de } M^{(n-1)}M^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)},$$

et en ajoutant, réductions faites,

$$\text{Somme des projections de } M'M''M'''\dots M^{(n)} = x^{(n)} - x'.$$

23. Deux points M' et M'' étant situés d'une manière quelconque relativement à trois axes coordonnés, si par chacun de ces points on mène trois plans parallèles aux plans coordonnés, on formera un parallélipipède dont la droite $M'M''$ sera une diagonale, et dont les trois arêtes contiguës partant du sommet M' seront égales et parallèles, avec le même sens, aux trois projections $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, de la droite $M'M''$ sur les axes coordonnés.

Si l'on porte sur les trois axes, à partir de l'origine O, des distances égales à ces projections, chacune dans le sens qui convient à son signe, et qu'on achève le parallélipipède dont ces distances seront trois arêtes contiguës, ce second parallélipipède sera égal au premier; sa diagonale, partant de l'origine O, sera parallèle à la droite $M'M''$, de même sens et de même grandeur.

Dans le cas particulier où l'une des projections est nulle, les points $M'M''$ sont dans un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, et les parallélipipèdes se réduisent à des parallélogrammes. Si deux des projections étaient nulles, les deux points seraient sur une droite parallèle à l'un des axes, et la distance $M'M''$ serait égale à sa projection sur cet axe.

24. Lorsque les trois axes sont rectangulaires, si l'on

appelle u la distance M'M'', on a, en rapprochant la remarque du numéro précédent de celle du nº 19,

$$u^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2.$$

Si les deux points sont dans le plan des x et y, ou dans un plan parallèle, la formule se réduit à

$$u^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2.$$

§ II. EXPRESSION DE LA DIRECTION D'UNE DROITE PARTANT D'UN POINT DÉTERMINÉ. — LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

1°. Un point, une longueur et une direction, déterminent une droite limitée.

25. Une droite M'M'', joignant deux points déterminés, peut être définie autrement que par la position de ses deux extrémités M', M''.

Elle peut l'être par une réunion de données propres à faire connaître trois choses distinctes appartenant à cette droite, savoir :

1°. La *position* d'un des points extrêmes, M' par exemple ;

2°. La *longueur* M'M'' ;

3°. La *direction* que suivrait un point mobile pour décrire la droite M'M'', en partant de M'.

On a vu (7) et (13) que la *position* du point M' est définie d'une manière très-simple par les *valeurs algébriques* de ses coordonnées relatives à trois axes.

La *longueur* M'M'' est une quantité concrète sans signe algébrique, et s'exprime à l'aide du nombre qui donne son rapport à une longueur connue.

La *direction* allant de M' vers M'' sera complétement définie par des quantités qui définiront la direction de toute autre droite *parallèle* à M'M'', et de *même sens*. Suppo-

sons, pour plus de simplicité, que cette droite auxiliaire, d'une longueur quelconque, parte de l'origine des coordonnées; désignons-la par Ou, et examinons quelles sont les quantités propres à définir sa direction.

2°. Direction d'une droite dans un plan donné, définie par un angle et un signe.

26. Le cas le plus simple est celui où la droite Ou est dans un des plans coordonnés, par exemple celui des x et y. Alors, pour déterminer la direction Ou, il suffit d'un angle et d'un signe, + ou —.

L'angle est celui que décrirait une droite mobile qui, d'abord dirigée suivant un axe connu, par exemple Ox, dans le sens positif, viendrait prendre la position de Ou. Le signe est nécessaire pour désigner le sens du mouvement de rotation de la droite mobile.

27. Le moyen le plus usité de désigner un angle est son expression en degrés. Nous emploierons l'ancienne division de l'angle droit en 90 degrés, du degré en 60 minutes, de la minute en 60 secondes. On sait que, dans la pratique, pour mesurer un angle, on place à son sommet le centre d'un cercle dont la circonférence est divisée en 360 parties appelées aussi degrés; il en résulte que le nombre entier ou fractionnaire de degrés de l'arc compris entre les côtés de l'angle est égal au nombre de degrés de cet angle; c'est pourquoi l'on dit que l'arc sert de mesure à l'angle. Il est quelquefois utile de considérer des angles non-seulement plus grands que 180°, ou deux droits, mais même plus grands que 360°, ou quatre droits. Rien n'empêche de concevoir que le côté mobile, après être parti de la position Ox, ne s'est arrêté à la position Ou qu'après avoir fait plus d'une révolution.

28. Un autre moyen dont on fait usage dans la haute

Géométrie et dans la Mécanique pour désigner un angle consiste à exprimer le rapport de l'arc qui lui sert de mesure au rayon avec lequel cet arc est décrit. Dans ce cas l'angle droit, au lieu d'être représenté par 90°, est exprimé par $\frac{1}{2}\pi$ ou approximativement par $1{,}5708$. Si un angle est représenté de cette manière par le nombre abstrait a, on en conclura que son nombre de degrés est $\frac{180\,a}{\pi}$.

29. La grandeur de l'angle que le côté mobile Ou est censé avoir décrit à partir de la position Ox connue ne suffit pas pour déterminer la direction Ou; il faut encore, comme nous l'avons dit, exprimer le sens du mouvement de la droite mobile. Or, par imitation de ce qui se fait pour définir la position d'un point sur une ligne connue (5), on choisit arbitrairement comme positif l'un des deux sens possibles du mouvement de rotation, et l'on affecte du signe + ou du signe — l'angle dont il s'agit, suivant le sens dans lequel on le suppose décrit.

30. Il résulte de cette convention que la direction d'une droite Ou, définie par l'angle positif ou négatif qu'elle fait avec une droite donnée Ox, est susceptible d'une infinité d'*expressions équivalentes*.

Si elle est exprimée par α°, elle le sera également par $(\alpha+360)^\circ$, par $(\alpha+720)^\circ$, en général par $(\alpha+n.360)^\circ$, en représentant par n un nombre entier positif.

La même direction sera encore exprimée par $-(360-\alpha)^\circ$, par $-(720-\alpha)^\circ$, en général par $-(n.360-\alpha)^\circ$ ou $(\alpha-n.360)^\circ$.

31. Au moyen de cette même convention du n° 29, on renfermera dans une seule formule la réponse, pour tous les cas possibles, à la question suivante, analogue à celle du n° 3 :

Connaissant les directions de deux droites Ou′, Ou″, *par leurs angles positifs ou négatifs* α', α'', *avec une droite* Ox, *on demande la situation de* Ou″ *par rapport à* Ou′, *c'est-à-dire la grandeur et le signe de l'angle* u′Ou″, *désigné par* β.

Les six cas possibles sont résolus par la formule

$$\beta = \alpha'' - \alpha'.$$

Lorsque l'application de cette formule donne un résultat négatif, on peut le remplacer par un angle positif équivalent, en ajoutant 360° ou un multiple de 360°. Exemple :

$$\alpha'' = 80^\circ, \quad \alpha' = 125^\circ, \quad \beta = -45^\circ \quad \text{ou} \quad +315^\circ.$$

L'une ou l'autre de ces expressions de β suffit pour déterminer la direction de Ou″ dans le plan xOu′.

3°. Expression d'un angle positif ou négatif par ses lignes ou rapports trigonométriques.

32. La théorie des projections ou des coordonnées fournit d'autres moyens d'exprimer la direction d'une droite dans un plan.

Soient (*fig.* 6)

Ox et Oy deux axes dont le second fait avec le premier un angle droit positif;

Ou (*) une droite partant de l'origine O, et faisant avec Ox un angle quelconque α positif ou négatif;

AM (*) l'arc supposé décrit par un point quelconque d'une droite mobile qui, partant de la position Ox, parcourrait l'espace angulaire α pour prendre la position Ou;

(*) Dans la figure, on voit, au lieu des lettres u et M, les lettres u′, u″, u‴, u^IV, M′, M″, M‴, M^IV. C'est pour faire comprendre que la droite Ou, à laquelle le texte s'applique d'une manière générale, peut avoir une direction quelconque à partir du point O dans le plan de la figure.

r le rayon OA ou OM de cet arc;

x et y les coordonnées rectangulaires positives ou négatives du point M, tandis que r est une distance essentiellement positive, parce qu'elle est portée sur la partie positive de la droite génératrice de l'angle.

Il est aisé de voir que la direction de la droite Ou sera déterminée, si l'on connaît les signes des coordonnées x, y, et l'un quelconque des rapports que les valeurs absolues des trois quantités x, y et r, ont entre elles, sans qu'il soit nécessaire d'avoir ces valeurs absolues.

De là on a été conduit à considérer les rapports *algébriques*, c'est-à-dire positifs ou négatifs, que les quantités x, y, r, ont entre elles.

Ces rapports sont au nombre de six, et ont reçu des noms particuliers.

1°. SINUS. *Le rapport algébrique* $\frac{y}{r}$ *de l'ordonnée* y *au rayon* r, rapport qui a le même signe que l'ordonnée y, *s'appelle le sinus de l'angle* α, en désignant, nous le répétons, par α l'un quelconque des angles, positifs ou négatifs, plus petits ou plus grands que quatre droits, que fait avec l'axe Ox la droite joignant l'origine O avec le point M, dont les coordonnées rectangulaires, positives ou négatives, sont y et x.

Le mot *sinus*, ou plutôt son abrégé *sin*, est formé des initiales du latin *semi-inscripta*, demi-inscrite ou demi-corde, parce que l'ordonnée de y est effectivement la moitié d'une corde dans le cercle dont r est le rayon; et si l'on suppose, comme on le dit communément, que la longueur r est prise égale à une unité linéaire, l'ordonnée y a précisément, eu égard à son signe, la même expression que le sinus de l'angle α.

2°. COSINUS. *Le rapport algébrique* $\frac{x}{r}$ *de l'abscisse* x *au*

rayon r, rapport de même signe que l'abscisse x, *s'appelle cosinus de l'angle* α.

Le mot *cosinus*, que quelques auteurs écrivent co-sinus, est formé de *complément* et de *sinus*, parce qu'on peut considérer le cosinus d'un angle comme étant le sinus du complément de cet angle. Nous reviendrons (53) sur la généralité de cette relation.

3°. Tangente. *Le rapport algébrique* $\frac{y}{x}$ *de l'ordonnée* y *à l'abscisse* x, rapport positif ou négatif, selon que les deux coordonnées ont le même signe ou des signes contraires, *s'appelle tangente de l'angle* α.

Pour expliquer l'origine de cette dénomination, menons par l'origine A de l'arc AM une tangente qui rencontre la droite Ou ou son prolongement au point N, et appelons t la portion AN de cette tangente prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'elle a le même sens que Oy ou le sens contraire. Le rapport $\frac{t}{r}$ est dans tous les cas égal à $\frac{y}{x}$ et devient égal à t si l'on fait $r = 1$. C'est pour cela que le rapport $\frac{y}{x}$ se nomme la tangente de l'angle α.

4°. Cotangente. *On appelle cotangente de l'angle* α *le rapport* $\frac{x}{y}$ *inverse de la tangente* et de même signe. Ce mot signifie *tangente du complément*.

5°. Sécante. *On appelle sécante de l'angle* α *le rapport* $\frac{r}{x}$ *inverse du cosinus* et par conséquent de même signe.

Pour reconnaître d'où vient ce nom, prolongeons le rayon OM de part et d'autre pour en former une sécante indéfinie qui rencontre en N la tangente AN, et appelons s la portion ON de cette sécante, en convenant de lui donner le signe $+$ quand ON a le même sens que OM, et le signe $-$

dans le cas contraire. Le rapport $\frac{s}{r}$ a dans tous les cas la grandeur et le signe de $\frac{r}{x}$ et devient égal à s si l'on fait $r = 1$.

6°. Cosécante. *On appelle cosécante de l'angle* α *le rapport* $\frac{r}{y}$, *inverse du sinus*, et par conséquent de même signe.

Le mot *cosécante* signifie *sécante du complément*.

On voit pourquoi les six rapports auxquels donnent lieu les trois quantités x, y et r relatives à un point quelconque pris sur le côté générateur de l'angle α, ont été appelés les *lignes trigonométriques* de cet angle, dénomination consacrée par l'usage, mais qui peut paraître impropre aujourd'hui que l'on s'accorde à désigner sous ce nom des *rapports* ou nombres abstraits affectés d'un signe, + ou —.

33. *Notations.* On écrit en abrégé

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\quad \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \text{tang}\,\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\text{coséc}\,\alpha = \frac{r}{y},\quad \text{séc}\,\alpha = \frac{r}{x},\quad \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

L'angle α étant formé par la droite Ou avec l'axe Ox, il nous arrivera souvent de le désigner par la notation (u, x), qu'on énonce en disant *angle de* u *avec* x; et les six formules précédentes s'écriront ainsi :

$$\sin(\text{u}, \text{x}) = \frac{y}{r},\quad \cos(\text{u}, \text{x}) = \frac{x}{r},\quad \text{tang}(\text{u}, \text{x}) = \frac{y}{x};$$

$$\text{coséc}(\text{u}, \text{x}) = \frac{r}{y},\quad \text{séc}(\text{u}, \text{x}) = \frac{r}{x},\quad \cot(\text{u}, \text{x}) = \frac{x}{y}.$$

Ces formules résument de la manière la plus précise les définitions rigoureuses et générales de ce qu'il faut entendre

par sinus, cosinus, etc., d'un angle. C'est sur elles que nous nous appuierons dans les démonstrations et applications. Les étymologies géométriques doivent seulement aider à retrouver les noms des rapports trigonométriques et à se rappeler leur signification.

34. Les ingénieurs désignent quelquefois des angles par leurs sinus ou leurs tangentes, qui en donnent une idée plus nette que l'expression en degrés.

Le *fruit* d'un mur, la *base* d'un talus *par unité de hauteur,* sont les tangentes d'angles avec la verticale; la *pente* d'une route, exprimée en *hauteur par mètre de longueur,* est le sinus ou la tangente de l'angle à l'horizon, selon que la longueur est mesurée parallèlement à la route ou parallèlement à l'horizon : distinction d'ailleurs indifférente dans les cas ordinaires, parce que le sinus et la tangente sont sensiblement égaux pour les petits angles.

35. Il résulte des définitions du n° 32 plusieurs conséquences remarquables :

1°. Tout sinus ou cosinus est compris entre les valeurs extrêmes ± 1 : car les coordonnées y et x, positives ou négatives, sont en général numériquement plus petites que r; tout au plus l'une de ces coordonnées est égale à r, mais alors l'autre est nulle.

2°. A mesure que α croît de zéro jusqu'à 90°, le sinus prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à 1, le cosinus toutes celles depuis 1 jusqu'à zéro; la tangente croît de *zéro à l'infini.*

3°. Depuis l'angle de 90° jusqu'à celui de 180°, le sinus reste positif comme y, mais décroît de 1 à zéro; le cosinus est négatif comme x, et passe de zéro à -1; la tangente est négative, et varie de $-\infty$ à 0.

4°. Depuis 180° jusqu'à 270°, le sinus varie de zéro à -1; le cosinus de -1 à zéro; la tangente de zéro à $+\infty$.

5°. Depuis 270° jusqu'à 360°, le sinus varie de -1 à zéro; le cosinus de zéro à $+1$; la tangente de $-\infty$ à zéro.

6°. A mesure qu'un angle variable approche de 90°, sa tangente approche de l'infini *positif* ou de l'infini *négatif*, selon que l'angle croît ou décroît. C'est en ce sens qu'on dit $\tang 90° = \pm \infty$. On a de même $\tang 270° = \pm \infty$.

7°. Les trois lignes trigonométriques *coséc*, *séc*, *cot*, sont les inverses des trois premières, et ont les mêmes signes.

8°. En général, si l'on ne considère que les valeurs numériques des lignes trigonométriques d'un angle quelconque uOx, elles sont égales à celles de l'angle aigu formé par Ou, soit avec Ox, soit avec son prolongement négatif, cet angle aigu étant considéré comme positif. En effet, pour ces deux angles, les longueurs des coordonnées x et y sont les mêmes; leurs signes seuls varient, et r est constant.

36. Il existe des tables (*) au moyen desquelles, étant donné un angle quelconque au-dessous de 90°, on trouve ses lignes trigonométriques; et réciproquement, connaissant l'une de ces lignes, on trouve l'expression de l'angle aigu correspondant en degrés, minutes, etc.

Lorsqu'il s'agit d'un angle quelconque, positif ou négatif, d'un nombre de degrés connu, et pouvant excéder 90° en valeur absolue, il est facile, d'après ce qui précède, de déterminer les signes de ses lignes trigonométriques; on trouve ensuite leurs valeurs numériques dans les tables en considérant l'angle aigu correspondant.

37. Mais si, réciproquement, on se donne le signe et la valeur numérique d'une seule des lignes trigonométriques

---

(*) On verra, nos 60 et 61, comment on a pu les calculer.

d'un angle uOx, cette donnée, d'où l'on déduit, à l'aide des tables, l'angle aigu de Ou, soit avec Ox, soit avec son prolongement négatif, ne suffit pas pour faire connaître complétement la direction de la droite Ou dans le plan xOy. En effet,

1°. Soit donné $\sin\alpha$. Si l'on prend arbitrairement le rayon r ou OM (*fig.* 6), on aura

$$y = r\sin\alpha.$$

On connaîtra donc l'ordonnée du point M, intersection de la droite cherchée, et du cercle dont le rayon est r. Or deux points M′, M″, ou M‴, M^{IV} (selon que $\sin\alpha$ est positif ou négatif), jouissent de cette propriété. On voit que les deux angles AOM′, AOM″, positifs et plus petits que deux droits, qui ont le même sinus positif, valent ensemble deux angles droits; ils sont suppléments l'un de l'autre. En général, le même sinus appartient à deux droites symétriquement placées par rapport à l'axe Oy.

2°. Soit donné $\cos a$. On aura

$$x = r\cos a,$$

et l'on connaîtra ainsi l'abscisse du point M. Or deux points M′, M^{IV}, ou M″, M‴ (selon que $\cos\alpha$ est positif ou négatif), jouissent de cette propriété, et le même cosinus appartient à deux droites symétriquement placées par rapport à l'axe Ox.

3°. Soit donné $\operatorname{tang}\alpha$. On aura

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha,$$

et il sera aisé de trouver sur la demi-circonférence positive un point qui satisfasse à cette condition : ce sera par exemple M′ ou M″, selon que $\operatorname{tang}\alpha$ sera positive ou négative. Mais, l'un ou l'autre étant trouvé, le point diamétralement

opposé ayant des coordonnées de même grandeur et de signes contraires satisfera également. Ainsi, selon que tang α sera positive ou négative, les droites OM′, OM‴, ou les droites OM″, OM^{IV}, satisferont à cette donnée. En général la même tangente appartient à deux droites dirigées en sens contraires.

38. Il résulte de ces considérations, et des définitions du n° 32, que, si deux droites différentes font avec Ox des angles ayant le même sinus, leurs cosinus sont numériquement égaux et de signes contraires, et il en est de même des tangentes. En général, à une même valeur de l'une des lignes trigonométriques sinus, cosinus, tangente, répondent, pour chacune des deux autres, deux valeurs numériquement égales et de signes contraires.

39. Cette propriété peut être démontrée algébriquement d'après les équations générales

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\quad \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \tang\alpha = \frac{y}{x},\quad y^2 + x^2 = r^2,$$

qui donnent

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\quad \tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Si $\sin\alpha$ est connu, on obtient

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha},\quad \tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},$$

les deux signes supérieurs ou les deux inférieurs devant être pris simultanément.

Si $\cos\alpha$ est connu, on a de même

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha},\quad \tang\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Enfin, si $\tang\alpha$ est connue, on a, en éliminant d'abord

$\sin\alpha$,

$$\cos^2\alpha\,(\text{tang}^2\alpha+1)=1,$$

d'où

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}},\quad \sin\alpha=\frac{\text{tang}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}.$$

Ces formules ont lieu quel que soit l'angle α, positif ou négatif. On les retrouve rapidement au moyen des deux triangles semblables OM′P, ON′A de la *fig.* 6, en faisant

$$OA=OM'=1,\ M'P=\sin\alpha,\ OP=\cos\alpha,\ AN'=\text{tang}\,\alpha,$$
$$ON'=\text{séc}\,\alpha=\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}.$$

Une des quatre dernières lignes suffit pour déterminer chacune des trois autres; et quand l'expression obtenue comporte un radical, on lui donne pour la généraliser le double signe $\pm$.

40. On conclut aisément de ce qui précède qu'en général, étant donnés le signe et la grandeur d'une des trois lignes trigonométriques principales d'un angle uOx, et le signe seulement de l'une des deux autres, la direction Ou, dans le plan xOy, est complétement déterminée.

4°. Direction d'une droite hors des plans coordonnés.

41. Considérons maintenant le cas où la droite Ou, dont il s'agit de définir la direction, n'est dans aucun des plans coordonnés, et supposons, pour plus de simplicité, que ces plans soient perpendiculaires les uns aux autres (*fig.* 7).

Prenons encore sur la partie positive de la droite Ou, un point M, à une distance r de l'origine O, et appelons x, y, z, les coordonnées de ce point; il est évident que la direction Ou sera connue si l'on connaît les rapports

$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ (rapports algébriques, c'est-à-dire positifs ou négatifs, chacun étant de même signe que son antécédent) : car, en prenant r à volonté, on en conclura les valeurs des trois coordonnées, c'est-à-dire leurs longueurs et leurs sens, ce qui déterminera la situation du point M (13).

La droite MP qui joint l'extrémité de r à l'extrémité de l'abscisse x, est perpendiculaire à Ox. Il s'ensuit que x serait également l'abscisse rectangulaire du point M dans le plan xOu.

On a donc (32)

$$\frac{x}{r} = \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x});$$

et de même

$$\frac{y}{r} = \cos(\mathrm{u}, \mathrm{y}), \quad \frac{z}{r} = \cos(\mathrm{u}, \mathrm{z}).$$

Ainsi *la direction de la droite* Ou *est déterminée par les cosinus des trois angles qu'elle fait avec les trois axes coordonnés.*

42. Ces trois cosinus ne peuvent pas être pris arbitrairement. En effet, on a entre les coordonnées rectangulaires x, y, z, du point M, la relation (19)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ou

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

qui, lorsqu'on y substitue les valeurs du numéro précédent, devient

$$\cos^2(u, x) + \cos^2(u, y) + \cos^2(u, z) = 1.$$

Cette équation exprime un théorème qu'il importe de retenir.

Il en résulte cette conséquence que, lorsque l'on se donne les cosinus des angles qu'une droite Ou fait avec deux des axes coordonnés rectangulaires, il ne reste d'indéterminé que le *signe* du cosinus de son angle avec le troisième axe.

43. *Remarque*. Donner le cosinus de l'angle qu'une droite fait avec un axe, c'est faire connaître une nappe de surface conique de révolution sur laquelle se trouve cette droite. Si l'on donne deux cosinus relatifs à deux axes différents, la droite est l'une des deux génératrices d'intersection de deux nappes coniques déterminées; il suffit, pour compléter la détermination de la droite, de savoir si l'angle qu'elle fait avec le troisième axe est aigu ou obtus, et c'est ce qu'apprend le signe de son cosinus.

§ III. EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE DE LA PROJECTION ORTHOGONALE D'UNE DROITE OU D'UN CONTOUR POLYGONAL SUR UN AXE.

44. Soient deux axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 8) et soient, dans le même plan, deux points M', M'', dont les coordonnées sont x', y', x'', y''. Les projections $x''-x'$, $y''-y'$, de la droite M'M'', peuvent être exprimées en *fonctions* de la longueur M'M'', et de l'angle que cette droite, prise dans le sens M'M'', fait avec Ox.

En effet, si l'on mène M'X et M'Y, parallèles à Ox et à Oy, et de même sens, les coordonnées X, Y, du point M, par rapport à ces nouveaux axes rectangulaires, seront des mêmes grandeurs et des mêmes signes que les projections $x''-x'$, $y''-y'$, et l'angle de M'M'' avec M'X sera de même grandeur et de même signe qu'avec Ox. Or, par les définitions du n° 32, on a, en faisant M'M'' $= u$,

$$X = u \cos(\text{u}, \text{X}), \quad Y = u \sin(\text{u}, \text{X}).$$

Donc, si l'on représente par (u, x) l'angle que la droite

M′M″ fait avec l'axe des x, on a pour les projections orthogonales de M′M″

$$x'' - x' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x}), \quad y'' - y' = u \sin(\mathrm{u}, \mathrm{x}).$$

On remarquera que, dans ces formules, les lettres x'', x', y'', y', des premiers membres, représentent des longueurs affectées de signes : la lettre u, hors de la parenthèse, est une longueur seulement; les lettres u et x, dans la parenthèse, désignent la droite M′M″ et l'axe de projection, considérés quant à leurs directions.

45. La formule

$$x'' - x' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x})$$

est également vraie pour la projection orthogonale d'une droite sur un axe Ox qui ne serait pas dans un même plan avec la droite, pourvu que par l'*angle des deux droites quelconques dans l'espace* on entende l'*angle qu'on obtient en faisant partir d'un point quelconque deux côtés parallèles à ces droites, et de même sens qu'elles.*

En effet, la projection orthogonale P′P″ (*fig.* 9) de la droite M′M″ sur l'axe Ox s'obtient en menant par M′ et M″ deux plans M′C′P′, M″C″P″, perpendiculaires à Ox, et le rencontrant en P′ et P″. Si, par M′, on mène M′X parallèle à Ox, et de même sens, la projection M′N ou X, de M′M″, sur ce nouvel axe, sera de même longueur et de même signe que P′P″, puisque ce sont deux parallèles de même sens comprises entre deux plans parallèles. Or, la ligne projetante M″N étant perpendiculaire à M′N, on a, comme au numéro précédent,

$$\mathrm{M'N} \text{ ou } X = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{X}),$$

donc

$$x'' - x' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x});$$

c'est-à-dire que *la projection orthogonale d'une droite sur*

un axe quelconque est égale (même grandeur et même signe) *au produit de la longueur de cette droite par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'axe.*

46. De cette proposition, et de celle du n° **22**, on tire la conséquence suivante, dont nous ferons un fréquent usage :

Théorème. *Si un chemin polygonal* M′M″M‴... M *conduit du point* M′ *au point* M, *la somme algébrique des produits des chemins rectilignes partiels* M′M″, M″M‴,..., *multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec un axe quelconque, est égale à la projection orthogonale du chemin direct* M′M *sur le même axe.*

La formule qui renferme ce théorème est

$$x - x' = u' \cos(\mathrm{u}', \mathrm{x}) + u'' \cos(\mathrm{u}'', \mathrm{x}) + u''' \cos(\mathrm{u}''', \mathrm{x}) \ldots$$

et s'exprime en abrégé par

$$x - x' = \Sigma\, u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x}),$$

en remplaçant par la notation Σ le mot *somme* appliqué à une suite de termes semblables, et en désignant par u la longueur de chacun des côtés du contour, dont l'angle (u, x) avec l'axe doit être pris en ayant égard au sens dans lequel ce côté est décrit.

47. La formule du n° **45**, étant appliquée aux projections d'une droite u sur trois axes coordonnés rectangulaires, donne

$$x'' - x'' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{x}),$$
$$y'' - y' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{y}),$$
$$z'' - z' = u \cos(\mathrm{u}, \mathrm{z}).$$

En y joignant l'équation du n° **24**

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = u^2,$$

on voit qu'il suffit de connaître les longueurs et les signes

des trois projections $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, pour en conclure la longueur u, puis les grandeurs des trois *cosinus*, qui ont d'ailleurs les mêmes signes que les projections.

48. PROBLÈME. *Connaissant les coordonnées x, y, z, d'un point* M *relativement à trois axes coordonnés quelconques* Ox, Oy, Oz, *trouver l'abscisse orthogonale X du même point, comptée à partir de la même origine* O, *sur un axe* OX, *faisant, avec les trois axes coordonnés, des angles connus.*

L'abscisse x et deux parallèles aux coordonnées y, z, forment un chemin polygonal conduisant de l'origine O au point M (14), et la somme algébrique de leurs projections orthogonales sur OX est égale à X, projection de OM sur le même axe (22). D'après cela, supposant les coordonnées x, y, z, positives, on a (46)

$$X = x \cos(\mathrm{x}, \mathrm{X}) + y \cos(\mathrm{y}, \mathrm{X}) + z \cos(\mathrm{z}, \mathrm{X}),$$

les parenthèses indiquant les angles du nouvel axe OX, pris dans son sens positif, avec les trois coordonnées, ou, ce qui est la même chose, avec les trois axes coordonnés, pris dans leur sens positif. Maintenant, si l'une des coordonnées, x par exemple, était négative, il est clair que sa projection devrait avoir un signe contraire à celui qu'elle aurait eu dans la première hypothèse; or il suffit, pour cela, dans le produit $x \cos(\mathrm{x}, \mathrm{X})$, de donner à la valeur particulière de x, premier facteur de ce produit, le signe qui lui appartient d'après son sens, et d'entendre toujours par la notation (x, X) l'angle des axes Ox, OX, donné d'après l'énoncé de la question.

49. PROBLÈME. *Connaissant les angles que deux droites quelconques ou leurs parallèles de même sens* OX, OY, *font avec trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *trouver le cosinus de l'angle* (X, Y) *des deux droites entre elles.*

Sur la partie positive de la droite OY prenons une longueur OM désignée par Y; sa projection orthogonale, ou l'abscisse du point M sur la droite OX, sera

$$X = Y \cos(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

et les coordonnées x, y, z, du même point M, seront

$$x = Y \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{x}), \quad y = Y \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{y}), \quad z = \mathrm{Y} \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{z}).$$

La substitution de ces expressions dans l'équation du numéro précédent donne, le facteur Y étant supprimé,

$$\cos(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \cos(\mathrm{X}, \mathrm{x}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{x}) + \cos(\mathrm{X}, \mathrm{y}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{y}) + \cos(\mathrm{X}, \mathrm{z}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{z}).$$

50. Dans le cas où l'angle (X, Y) est droit, on a

$$\cos(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0,$$

donc

$$\cos(\mathrm{X}, \mathrm{x}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{x}) + \cos(\mathrm{X}, \mathrm{y}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{y}) + \cos(\mathrm{X}, \mathrm{z}) \cos(\mathrm{Y}, \mathrm{z}) = 0.$$

§ IV. FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE PLANE.

51. THÉORÈME. *Deux angles α, $-\alpha$, de même grandeur et de signes contraires, ont le même cosinus, et des sinus de même grandeur, mais de signes contraires.*

En effet, si x et y sont les coordonnées de l'extrémité M de l'arc de rayon r qui mesure l'angle α, et si x' et y' sont les coordonnées de l'extrémité M' de l'arc de même rayon qui mesure l'angle $-\alpha$, il est aisé de voir que, les deux points M, M' étant symétriquement placés par rapport à l'axe des x, on a

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = -y',$$

ce qui, d'après les formules

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha,$$
$$x' = r\cos(-\alpha), \qquad y' = r\sin(-\alpha),$$

conduit évidemment à la double proposition énoncée, savoir :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

52. Corollaire. Des équations $x = x'$ et $y = -y'$, on tire, d'après les définitions du n° 32,

$$\text{tang}(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\text{séc}(-\alpha) = \text{séc}\,\alpha, \quad \text{coséc}(-\alpha) = -\text{coséc}\,\alpha.$$

53. Théorème. *Si la somme algébrique de deux angles vaut un angle droit positif*, ou, en d'autres termes, *si deux angles sont algébriquement compléments l'un de l'autre, le sinus de l'un de ces angles est égal au cosinus de l'autre.*

C'est ce qu'exprime l'une ou l'autre des équations

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha),$$

α étant un angle quelconque, positif ou négatif, d'une valeur absolue plus petite ou plus grande que 90°, mais l'un des angles α et $90^\circ - \alpha$ étant nécessairement positif.

Démonstration. 1°. Si les deux angles sont positifs, et qu'on ait $\alpha + \alpha' = 90^\circ$, chacun d'eux est plus petit qu'un angle droit. Il faut démontrer qu'on a

$$\sin\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\alpha = \sin\alpha'.$$

Soit α (*fig.* 6) l'angle M'Ox ; α' est donc égal à M'Oy. On a, par les définitions du n° 32,

$$y = r\sin\alpha, \quad x = r\cos\alpha.$$

Mais x peut être considérée comme ordonnée M'Q, et y

comme abscisse OQ, du point M′; et, puisque la droite O′M fait, avec l'axe des abscisses, dans ce cas, l'angle α', on a

$$x = r\sin\alpha', \quad y = r\cos\alpha'.$$

On tire de ces quatre équations les relations énoncées.

2°. Si l'un des angles est négatif, et qu'on ait $\alpha' - \alpha'' = 90°$, en désignant par α' et α'' des valeurs absolues, il faut démontrer qu'on a

$$\sin\alpha' = \cos(-\alpha'') \quad \text{et} \quad \cos\alpha' = \sin(-\alpha''),$$

ou, ce qui revient au même (51),

$$\sin\alpha' = \cos\alpha'' \quad \text{et} \quad \cos\alpha' = -\sin\alpha''$$

pour des angles absolus α', α'', dont la différence $\alpha' - \alpha''$ est de 90°, c'est-à-dire que, *si la différence de deux angles vaut un angle droit, le sinus du plus grand est égal au cosinus du plus petit, et le cosinus du premier a la même valeur numérique que le sinus du second, mais un signe contraire.*

Pour le démontrer, soit (*fig.* 10) $M''Ox = \alpha''$, le plus petit des deux angles, et $M'Ox = \alpha'$, qui excède α'' d'un angle droit. Quels que soient d'ailleurs ces deux angles, les deux points M″, M′, sont aux deux extrémités d'un arc de 90°, sur une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre; d'où il est facile de conclure, en examinant tous les cas possibles, que l'ordonnée d'un quelconque de ces points a la même grandeur absolue que l'abscisse de l'autre; mais que l'abscisse du point M′, le plus avancé des deux sur la circonférence, est de signe contraire à l'ordonnée de l'autre point M″, tandis que l'ordonnée de M′ a le même signe que l'abscisse de M″. Ainsi

$$y' = x'' \quad \text{et} \quad x' = -y''.$$

Or, en substituant dans ces équations les valeurs générales

$$y' = r\sin\alpha',\quad x' = r\cos\alpha',\quad x'' = r\cos\alpha'',\quad y'' = r\sin\alpha'',$$

on arrive aux relations qu'il fallait démontrer :

$$\sin\alpha' = \cos\alpha'' \quad \text{et} \quad \cos\alpha' = -\sin\alpha''.$$

54. Corollaire I. *Si la somme algébrique de deux angles vaut un angle droit positif, le produit de leurs tangentes est égal à l'unité,* ou, ce qui revient au même, *la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.*

En effet, α et α' satisfaisant à l'équation

$$\alpha + \alpha' = 90^\circ,$$

les relations

$$\sin\alpha = \cos\alpha',\quad \cos\alpha = \sin\alpha',$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'},$$

conduisent à

$$\operatorname{tang}\alpha\ \operatorname{tang}\alpha' = 1, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha = \cot\alpha'.$$

Corollaire II. *Si la différence de deux angles vaut un angle droit positif, le produit de leurs tangentes est égal à* -1.

En effet, de $\alpha - \alpha' = 90^\circ$ on conclut

$$\sin\alpha = \cos\alpha',\quad \cos\alpha = -\sin\alpha',$$

d'où, en divisant,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha'}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha\ \operatorname{tang}\alpha' = -1.$$

55. Problème. *Trouver les expressions de* $\sin(a \pm b)$ *et de* $\cos(a \pm b)$ *en fonctions de* $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$ et $\cos b$.

Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, dont le second fait avec le premier un angle droit positif, et soient

dans le même plan deux droites OA et OB, qui font avec Ox deux angles quelconques, positifs ou négatifs. Posons $xOA = a$ et $xOB = b$, et appliquons la formule générale du n° 49, dont le dernier terme disparaît, parce que l'axe Oz est perpendiculaire aux droites OA et OB. L'angle de OA avec OB étant, dans tous les cas possibles (31), exprimé par la différence $a - b$, nous avons (49)

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \cos AOy \cos BOy.$$

Or il est aisé de voir, en faisant au besoin une figure où l'on donne soit à OA, soit à OB des directions qui embrassent tous les cas possibles, qu'on a toujours

$$AOy = \pm(90^\circ - a) \quad \text{et} \quad BOy = \pm(90^\circ - b),$$

et par conséquent (51 et 53)

$$\cos AOy = \sin a \quad \text{et} \quad \cos BOy = \cos b.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

et répond à l'une des parties de la question proposée.

En remplaçant dans cette formule b par $-b$, on a avec la même généralité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Pour obtenir $\sin(a+b)$, il suffit de remarquer (53) que cette quantité est la même que $\cos(90^\circ - a - b)$, et d'appliquer la formule de $\cos(a-b)$ en remplaçant a par $90^\circ - a$, et conséquemment $\cos a$ par $\sin a$, et *vice versâ*. On obtient ainsi la formule générale

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

et, en y remplaçant b par $-b$,

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Les quatre formules qui précèdent, et dont une quelconque permet de conclure les trois autres, se résument ainsi :

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

56. *Cas particuliers :* 1° $b = a$, 2° $b = 2a$.

1°. $$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

ou

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

En remplaçant $2a$ par a, et par conséquent a par $\frac{1}{2}a$, on tire de ces deux dernières formules

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$
$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}.$$

Exemple. $a = 90°$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2°. On trouvera aisément

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

et

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

57. Des formules du n° 55, et de la relation générale

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tang} a,$$

on tire

$$\operatorname{tang}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b}{1 \mp \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

58. *Cas particuliers :* 1° $b = a$, 2° $b = 2a$.

1°. $$\operatorname{tang} 2a = \frac{2\operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

d'où

$$\operatorname{tang} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2a}}{\operatorname{tang} 2a}.$$

2°. $$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

59. En combinant par addition et soustraction les expressions trouvées au n° 55, on a

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b,$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b,$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b.$$

Faisons

$$a + b = p \quad \text{et} \quad a - b = q,$$

d'où

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2};$$

nous obtenons

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

formules qui servent à transformer une somme ou une différence en un produit (79 et 80).

Des deux premières on tire

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{p+q}{2}}{\operatorname{tang} \frac{p-q}{2}},$$

relation qui sert dans la résolution des triangles (67).

60. Nous avons dit (36) que l'on possède des tables qui font connaître, au degré d'approximation désirable, les rapports appelés communément lignes trigonométriques d'un angle aigu quelconque. Ces tables ont été calculées par des méthodes ingénieuses et savantes qu'on peut étudier dans les ouvrages spéciaux sur cette matière. Il nous suffit de faire comprendre ici la possibilité d'arriver aux mêmes résultats à l'aide des formules qui viennent d'être démontrées.

Nous remarquerons d'abord que, lorsqu'un angle est très-petit, l'arc qui, ayant pour rayon l'unité, lui sert de mesure, est sensiblement égal à son sinus; ce qui signifie que, *si l'on fait décroître indéfiniment l'angle, le rapport de l'arc au sinus approche autant qu'on veut de l'unité.*

En effet, si l'on suppose dans la *fig.* 6 le rayon $OA = 1$ et l'angle $AOM' = \alpha$, l'ordonnée $M'P$ et la tangente AN' auront précisément pour expressions celles de $\sin\alpha$ et de $\tang\alpha$ (32); et si l'on compare l'arc AM' à l'ordonnée $M'P$, et l'aire du secteur OAM' à celle du triangle OAN', on établira les inégalités suivantes :

1°. $$M'P < \text{corde}\, AM' < \text{arc}\, AM',$$

d'où

$$\sin\alpha < \text{arc}\,\alpha;$$

donc

$$\frac{\text{arc}\,\alpha}{\sin\alpha} > 1.$$

2°. $$\text{secteur}\, OAM' < \text{triangle}\, OAN',$$

$$\frac{1}{2} OA \times \text{arc}\,\alpha < \frac{1}{2} OA \times \tang\alpha,$$

d'où (39)

$$\text{arc}\,\alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

61. Au moyen de ces deux nombres et des formules du n° 56, on pourrait obtenir les valeurs des sinus et cosinus de tous les angles différant entre eux de 10″ depuis 0 jusqu'à 45°, et les résultats ainsi obtenus s'appliqueraient immédiatement à tous les angles depuis 45 jusqu'à 90°, attendu que le sinus et le cosinus d'un angle sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle complément du premier.

Quant aux autres lignes trigonométriques, on les déterminerait ensuite à l'aide de la formule $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ et de la septième remarque du n° 35.

§ V. RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

1°. Triangles rectangles.

62. Quatre cas différents se présentent dans la résolution d'un triangle *rectangle* ABC, suivant que l'on donne

1°. L'hypoténuse et les angles,

2°. L'hypoténuse et un côté d'angle droit,

3°. Un côté d'angle droit et les angles,

4°. Deux côtés d'angle droit.

En appliquant les définitions du n° 32, et en y remplaçant r par l'hypoténuse du triangle, on vérifiera facilement le tableau suivant, dans lequel a représente l'hypoténuse, b et c les côtés opposés aux angles aigus B, C. Quand l'un de ces angles est donné, l'autre s'en déduit.

DONNÉES.	FORMULES.
1°. a, B.	$b = a \sin B$, $c = a \cos B$.
2°. a, b.	$\sin B$ ou $\cos C = \frac{b}{a}$; $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$;
	à posteriori $c = a \cos B$ ou $c = b \,\mathrm{tang}\, C$.
3°. c, B.	$a = \frac{c}{\cos B}$, $b = c \,\mathrm{tang}\, B$.
4°. b, c.	$\mathrm{tang}\, B = \frac{b}{c}$;
	à posteriori $a = \frac{c}{\cos B}$ ou $a = \frac{b}{\sin B}$.

63. Les tables trigonométriques en usage donnent les logarithmes des lignes ou rapports trigonométriques, au lieu de leurs valeurs numériques. Il en résulte l'avantage de n'avoir à faire que des additions et des soustractions pour appliquer les formules ci-dessus. Nous expliquerons plus loin l'usage qu'on fait de ces tables.

2°. Résolution des triangles obliquangles.

64. Ier Cas. *On donne les angles et un côté a, en désignant parmi les angles connus l'angle A opposé à ce côté.*

Du sommet C abaissons (*fig.* 11) la perpendiculaire h sur le côté opposé c, et, soit que les angles A et B soient aigus, ou que l'un d'eux soit obtus, nous aurons

$$h = a \sin B, \quad h = b \sin A,$$

d'où

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

L'équation générale $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ démontre ce théorème :

Dans un triangle rectiligne quelconque, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.

65. IIᵉ Cas. *On donne deux côtés, a et b, et l'angle* A, *opposé à l'un d'eux, a.*

D'après le théorème précédent, on a

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

puis

$$C = 180^\circ - (A + B) \quad \text{et} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Au plus petit des deux côtés a, b, est opposé le plus petit des deux angles A, B. Donc, si $a > b$, B est aigu, son sinus suffit pour le déterminer; il y a toujours une solution.

Si $a < b$, l'angle A donné (*fig.* 12) est aigu; B peut être aigu ou obtus pour le même sinus. Donc il y a deux solutions, pourvu qu'on trouve

$$\sin B < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{b \sin A}{a} < 1,$$

ou $a > b \sin A$, c'est-à-dire $a > h$.

Si l'on demandait immédiatement le côté c, il faudrait poser

$$c = AD \pm DB = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

66. IIIᵉ Cas. *On donne deux côtés, a, b, et l'angle compris* C.

1°. On demande *à priori* le côté c.

Soient x et y les coordonnées rectangulaires du point B (*fig.* 13), CA étant pris pour axe des x et C pour origine; x est négative si l'angle est obtus. Dans tous les cas on a

$$c^2 = y^2 + (b - x)^2, \quad y^2 = a^2 - x^2, \quad x = a \cos C.$$

Les deux premières équations, ajoutées membre à mem-

bre, donnent la relation connue en géométrie élémentaire

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx;$$

et, en y substituant l'expression de x, on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

c étant ainsi déterminé, on rentre dans le premier cas (64).

2° On peut déterminer *à priori* l'angle A par sa tangente. Soit que C soit aigu ou obtus, et quelle que soit aussi la grandeur de A, on a

$$\tang A = \frac{y}{b-x} = \frac{a\sin C}{b-a\cos C}.$$

La grandeur et le signe de tang A faisant connaître A, et par suite B, on rentre dans le premier cas (64), et l'on calcule c par l'une des deux formules suivantes :

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}, \qquad c = \frac{b\sin C}{\sin B}.$$

Il est bon de vérifier si les angles A, B, trouvés, satisfont à la condition (64)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

3°. *Autre solution*, qu'on présente ordinairement comme plus propre à l'emploi des logarithmes, quoiqu'elle n'exige pas moins de calculs que la précédente pour arriver aux inconnues A, B et c.

C fait connaître A + B; on cherche A — B.

De la relation

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

on conclut

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Donc, d'après la dernière équation du n° 59, on a

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{a-b}{a+b},$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\frac{1}{2}(A-B).$$

Connaissant

$$\frac{1}{2}(A+B=m^{\circ} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(A-B)=n^{\circ},$$

on aura

$$A=(m+n)^{\circ}, \quad B=(m-n)^{\circ},$$

et on achèvera comme dans la deuxième méthode.

67. IVe Cas. *On donne les trois côtés.*

La formule démontrée au commencement du numéro précédent donne

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

soit que l'angle A soit aigu ou obtus. Donc

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Pour obtenir une formule plus propre à l'emploi des logarithmes, on reconnaît à l'inspection de la première équation l'utilité de remplacer $\cos A$ par un binôme dont un terme soit égal à l'unité, savoir (56) :

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2} \quad \text{ou} \quad \cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1.$$

Cette équation devient ainsi l'une des suivantes :

$$4bc\sin^2\frac{A}{2}=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a+c-b),$$

$$4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(b+c-a).$$

En posant, pour abréger,

$$a + b + c = 2p,$$

on obtient

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

et

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

L'angle $\frac{A}{2}$ étant nécessairement $< 90^\circ$, se trouve déterminé par l'une de ces trois formules. Quand il diffère peu de 90°, il vaut mieux le déterminer par son cosinus que par son sinus. C'est le contraire quand il est petit. A étant trouvé, on calcule de même B, puis C pour vérification.

68. *Surface d'un triangle en fonction de ses trois côtés.*

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}.$$

En substituant l'expression ci-dessus de $\cos A$, et représentant encore le périmètre $a + b + c$ par $2p$, on trouve la surface cherchée

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

§ VI. TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

69. Trois arcs de grands cercles, qui joignent trois points situés sur une même sphère, forment un *triangle sphérique*. Les trois *côtés* s'évaluent ordinairement en degrés ; les *angles* sont ceux que forment les tangentes aux côtés en leurs points d'intersection.

A tout triangle sphérique correspond un angle trièdre, dont les arêtes sont les droites menées du centre de la sphère aux trois sommets du triangle. Les *angles plans* ou *faces* du trièdre sont mesurés par les côtés du triangle sphérique, et les *angles dièdres* des faces ont la même mesure et la même expression que les *angles de ce triangle*.

Les problèmes où au moyen de données suffisantes on se propose de calculer les côtés ou les angles inconnus d'un triangle sphérique, sont précisément les mêmes que ceux où il s'agit de calculer les faces ou les angles dièdres d'un angle trièdre. C'est ce dernier point de vue que nous adoptons pour rechercher les relations qui existent entre quatre des six quantités, côtés ou angles d'un triangle sphérique. Il n'y a que quatre combinaisons distinctes à étudier.

70. 1°. Formule fondamentale. *Relation entre les trois côtés et un angle.* Pour trouver cette relation, supposons que, donnant deux faces b et c d'un trièdre et l'angle compris A, on demande la troisième face a opposée à A. Prenons pour plan de la *fig.* 14 celui de la face b représentée en POP′. Soient rabattues sur ce même plan les faces c et a, savoir : la face c en POM et la face a en P′OM′. Pour reformer le trièdre, il suffirait de faire tourner la face c autour de l'arête OP, et la face a autour de OP′, jusqu'à ce que les deux côtés OM et OM′ vinssent à coïncider et former ainsi la troisième arête dans l'espace. Cherchons sur la figure la projection d'un point de cette arête, et, pour cela, supposons que, dans le rabattement des faces latérales, ce point soit venu en M sur le côté rabattu de la face c, et en M′ sur celui de la face a. Les deux distances OM et OM′ sont égales. Les deux points M et M′, en tournant, l'un autour de OP, l'autre autour de OP′, ne sortent pas des plans projetés dans la figure suivant les droites MPN et M′P′N, respectivement perpendiculaires aux charnières. Donc les

deux points M et M′ se réunissent dans l'espace en un point, dont la projection est l'intersection N, et dont la distance à ce point est l'ordonnée d'une circonférence ayant son centre en P et son rayon égal à PM. En rabattant cette circonférence autour de MN, et achevant le triangle rectangle PNM_1, on obtient non-seulement la distance NM_1, dont nous venons de parler, mais l'angle rectiligne M_1PN qui mesure l'angle dièdre des deux faces b et c, angle que nous désignons par A, comme opposé à la face a.

La construction que nous venons de rappeler, et qui est enseignée dans les traités de Géométrie descriptive, se traduit très-aisément en une formule de Trigonométrie. Menons PQ perpendiculaire à OP′ et NR parallèle et égal à P′Q. Posons $OM = OM' = r$. Nous avons, en remarquant que $PN = PM_1 \cos A$, et $PM_1 = PM = r \sin c$,

$$\begin{aligned} r\cos a &= OP' = OQ + RN \\ &= OP\cos b + PN \sin b \\ &= r\cos c \cos b + r \sin c \cos A \sin b. \end{aligned}$$

Ainsi, en supprimant le facteur r, que nous aurions pu *à priori* faire égal à 1, nous obtenons la relation cherchée, qui s'applique évidemment à un quelconque des trois angles dièdres. On a donc, au moyen d'une *permutation tournante*, dans laquelle les lettres se remplacent dans l'ordre a, b, c, a,

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

71. 2°. *Relation entre deux côtés* a, c *et les angles opposés* A, C. On peut conclure cette relation des équations précédentes; mais on l'obtient immédiatement d'après la *fig.* 14, dans laquelle le triangle $P'NM'_1$, analogue à

PNM_1, donne l'angle dièdre C, opposé à la face c. On a

$$M_1N = M'_1N,$$

c'est-à-dire

$$r \sin c \sin A = r \sin a \sin C.$$

Donc, en général,

$$(2) \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

72. 3°. *Relation entre deux côtés* b *et* c, *l'angle* A *qu'ils comprennent, et un autre angle* C *ou* B. Soit à trouver une équation entre b, c, A et C. On l'obtiendrait en éliminant a entre deux des équations (1); mais plus simplement, d'après la *fig.* 14, en remarquant qu'avec les données b, c, A, on pourrait construire OMP, PNM_1, NP', et par suite $NP'M'_1$, on a

$$\tang C = \frac{NM'_1}{NP'} = \frac{NM_1}{PQ - PN \cos b}$$
$$= \frac{\sin c \sin A}{\cos c \sin b - \sin c \cos A \cos b},$$

ou bien

$$\cot C \sin A = \cot c \sin b - \cos b \cos A.$$

On a de même, eu égard aux permutations possibles :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cot B \sin A &= \cot b \sin c - \cos c \cos A, \\ \cot A \sin B &= \cot a \sin c - \cos c \cos B, \\ \cot C \sin B &= \cot c \sin a - \cos a \cos B, \\ \cot B \sin C &= \cot b \sin a - \cos a \cos C, \\ \cot A \sin C &= \cot a \sin b - \cos b \cos C. \end{aligned} \right.$$

73 Triangles ou trièdres supplémentaires. La proposition que nous allons exposer sert à obtenir une relation entre les trois faces et un des angles dièdres d'un an-

gle trièdre. L'équation qui l'exprime peut, il est vrai, se déduire des équations (1) par l'élimination de deux faces; mais on y parvient d'une manière plus simple et plus facile à fixer dans la mémoire par la considération d'un trièdre auxiliaire.

Quel que soit le premier trièdre OABC (*fig.* 15), abaissons d'un point O', pris dans son intérieur, une perpendiculaire sur chacune de ses faces, savoir : O'A' perpendiculaire sur la face BOC ou *a*, O'B' sur la face COA ou *b*, O'C' sur la face AOB ou *c*.

Nous formons ainsi un second angle trièdre, dont le sommet est O', et dont les faces rencontrent celles du premier suivant les droites A'B, BC', C'A, AB', B'C, CA'. Il en résulte un hexaèdre, dont les sommets O et O' sont diagonalement opposés, et qui deviendrait un parallélipipède rectangle dans le cas particulier où le trièdre primitif aurait chacune de ses trois faces égale à un angle droit.

Par construction, les trois arêtes O'A', O'B', O'C' du second trièdre sont perpendiculaires aux faces *a*, *b*, *c* du premier. Il s'ensuit que, réciproquement, les trois arêtes OA, OB, OC du premier, sont perpendiculaires aux faces *a'*, *b'*, *c'* du second (nous désignons ainsi les faces respectivement opposées aux arêtes O'A', O'B', O'C'). En effet, par exemple la face *a'* ou B'O'C' étant perpendiculaire au plan OAB'C (à cause de la perpendiculaire O'B') et au plan OAB'C (à cause de la perpendiculaire O'C'), est par conséquent perpendiculaire à leur intersection OA.

De là cette conséquence importante : que *les faces* de chacun des deux trièdres sont, quant à leur mesure, les suppléments des angles dièdres de l'autre, car, par exemple, la face B'O'C' ou *a'* étant perpendiculaire à l'arête OA, l'angle dièdre C'OAB' ou A a pour mesure l'angle rectiligne C'AB', lequel est supplément de l'angle B'O'C', puisque les angles O'C'A, O'B'A sont droits.

En généralisant cette remarque, on voit que si

a, b, c sont les faces du premier trièdre,

A, B, C les angles dièdres qui leur sont opposés,

a', b', c' les faces du deuxième trièdre respectivement perpendiculaires aux arêtes des angles A, B, C,

A′, B′, C′ les angles dièdres opposés aux faces a', b', c', on a entre les mesures en degrés de ces angles les relations :

$$\begin{aligned} 180^\circ &= A + a' = B + b' = C + c' \\ &= A' + a = B' + b = C' + c. \end{aligned}$$

C'est en vertu de cette propriété que les deux angles trièdres sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre.

Il est clair qu'à deux trièdres ainsi constitués répondent deux triangles sphériques, dont les côtés et les angles ont les mêmes valeurs numériques, et par conséquent les mêmes relations que les douze quantités que nous venons d'écrire. Ces triangles sphériques sont dits supplémentaires l'un de l'autre.

74. 4°. *Relation entre les trois angles et un côté d'un triangle sphérique.* C'est celle qui existe entre les angles dièdres A, B, C d'un trièdre et la face opposée à l'un d'eux; et elle se rattache à celle qui a lieu entre les trois faces a', b', c' du trièdre supplémentaire et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles.

Les formules (1) du n° 70, appliquées aux angles a', b', c', A′, B′ et C′ qu'on remplace ensuite par leurs valeurs $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, deviennent, par changement de signes des deux membres :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned} \right.$$

Résolution des triangles sphériques.

75. Les six cas différents deviennent analogues deux à deux par la considération du triangle supplémentaire.

I[er] Cas. *Sont donnés les trois côtés*. Les équations (1) déterminent les cosinus des angles.

II[e] Cas. *Sont donnés les trois angles*. Les trois équations (4) font connaître les cosinus des côtés.

III[e] Cas. *Sont donnés deux côtés et l'angle compris*. L'une des équations (1) détermine le cosinus du côté inconnu. Le reste du calcul rentre dans le I[er] Cas.

On peut rendre l'équation (1) plus propre à l'emploi des logarithmes au moyen d'un angle auxiliaire. On a successivement

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b\,(\cos c + \sin c \operatorname{tang} b \cos A) \\ &= \cos b\,(\cos c + \sin c \operatorname{tang} \varphi) \\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}(\cos\varphi \cos c + \sin\varphi \sin c), \end{aligned}$$

de sorte que l'angle a est déterminé par les deux équations très-simples

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A$$

et

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(c - \varphi).$$

IV[e] Cas. *Sont donnés deux angles et le côté compris*. L'une des équations (4) fait connaître le cosinus de l'angle inconnu; le reste rentre dans le II[e] Cas.

On peut faire subir à l'équation (4) une transformation analogue à celle qui vient d'être indiquée pour l'équation (1).

V[e] Cas. *Sont donnés deux côtés a, b et l'angle A op-*

posé à l'un d'eux. La formule (2) sert à calculer l'angle B opposé au second côté donné.

Pour calculer l'angle C au moyen des données a, b et A, on a l'une des équations (3) :

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C = \cot a \sin b;$$

mais cette équation, n'étant pas immédiatement applicable, parce qu'elle contient deux inconnues, sin C et cos C, on la transforme au moyen d'un angle auxiliaire φ. On a successivement

$$\begin{aligned} \cot a \sin b &= \cos b \left(\frac{\cot A}{\cos b} \sin C + \cos C\right) \\ &= \cos b \,(\operatorname{tang}\varphi \sin C + \cos C) \\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}\,(\sin\varphi \sin C + \cos\varphi \cos C) \\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi} \cos\,(C - \varphi). \end{aligned}$$

En définitive, l'angle C se trouve déterminé par les deux équations très-simples

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cot A}{\cos b}$$

et

$$\cos\,(C - \varphi) = \cot a \operatorname{tang} b \cos\varphi.$$

C étant connu, ainsi que A et a, on trouvera c par la formule (2).

On peut aussi calculer le côté c directement en partant de la première des formules (1), qu'on remplace par le système de deux équations

$$\cot\varphi' = \operatorname{tang} b \cos A,$$

et

$$\sin\,(c + \varphi') = \frac{\cos a \sin\varphi'}{\cos b}.$$

VI[e] Cas. *Sont donnés deux angles* A, B *et le côté a opposé à l'un d'eux.* La formule (2) sert à calculer le côté b opposé au second angle donné.

Pour calculer le troisième côté c, on a l'une des équations (3) qu'on transforme comme dans le V[e] Cas :

$$\begin{aligned}\cot A \sin B &= \cot a \sin c - \cos c \cos B \\ &= \cos B\left(\frac{\cot a}{\cos B}\sin c - \cos c\right) \\ &= \cos B(\cot\varphi \sin c - \cos c) \\ &= \frac{\cos B}{\sin\varphi}(\sin c\cos\varphi - \cos c \sin\varphi).\end{aligned}$$

En définitive c est déterminé par les deux équations

$$\cot\varphi = \frac{\cot a}{\cos B}$$

et

$$\sin(c - \varphi) = \operatorname{tang} B \cot B \sin\varphi;$$

c étant connu, on trouvera C par la formule (2).

On peut calculer C directement. On trouve, en transformant la première des formules (4), les deux équations

$$\cot\varphi' = \operatorname{tang} B \cos a$$

et

$$\sin(C - \varphi') = \frac{\cos A \sin\varphi}{\cos B}.$$

76. *Triangles sphériques rectangles.* Supposé que dans le triangle sphérique l'angle A soit droit, en faisant $\cos A = 0$ et $\sin A = 1$ dans les formules (1), (2), (3) et (4) qui contiennent ces deux quantités, on obtient les formules suivantes :

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\sin b = \sin a \sin B,$$
$$\sin c = \sin a \sin C,$$
$$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C,$$
$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B,$$
$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B,$$
$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C,$$
$$\cos a = \cot B \cot C,$$
$$\cos B = \sin C \cos b,$$
$$\cos C = \sin B \cos c.$$

Le tableau ci-après indique l'emploi de ces équations dans la résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles.

DONNÉES.	INCONNUES.	FORMULES A EMPLOYER.
a, b.	c	$\cos a = \cos b \cos c$,
	B	$\sin b = \sin a \sin B$,
	C	$\tan b = \tan a \cos C$.
a, B.	b	$\sin b = \sin a \sin B$,
	c	$\tan c = \tan a \cos B$,
	C	$\cos a = \cot B \cot C$.
b, B.	a	$\sin b = \sin a \sin B$,
	c	$\tan b = \sin c \tan B$,
	C	$\cos B = \sin C \cos b$.
b, C.	a	$\tan b = \tan a \cos C$,
	c	$\tan c = \sin b \tan C$,
	B	$\cos B = \cos b \sin C$.
b, c.	a	$\cos a = \cos b \cos c$,
	B	$\tan b = \sin c \tan B$,
	C	$\tan c = \sin b \tan C$.
B, C.	a	$\cos a = \cot B \cot C$,
	b	$\cos B = \sin C \cos b$,
	c	$\cos C = \sin B \cos c$.

Transformations propres à l'emploi des logarithmes. Formules de Delambre et de Néper.

77. La formule fondamentale (1) peut servir, comme nous l'avons dit, pour calculer un angle d'un triangle sphérique dont les trois côtés sont connus; mais elle se transforme en une autre plus commode pour l'emploi des logarithmes.

L'inspection de l'équation (1)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

conduit à remplacer cos A par un binôme dont un terme soit l'unité. Or (56) on a

$$\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1,$$

et l'équation (1) devient par la substitution de ces deux expressions de cos A

$$\cos(b - c) - \cos a = 2 \sin b \sin c \sin^2 \frac{A}{2},$$

$$\cos a - \cos(b + c) = 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{A}{2}.$$

Ici une seconde transformation se présente naturellement, car on sait que la différence de deux cosinus se remplace par un produit. On a en effet (59)

$$\cos(b - c) - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b),$$

$$\cos a - \cos(b + c) = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b + c) \sin \frac{1}{2}(b + c - a).$$

D'après cela, et si l'on pose, pour abréger,

$$2p = a + b + c,$$

on obtient

$$\sin A = \sqrt{\frac{\sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p - a)}{\sin b \sin c}},$$

et, par suite,

$$\tang \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p - b) \sin(p - c)}{\sin p \sin(p - a)}}.$$

Il est évident que la formule (4) doit se transformer d'une manière tout à fait analogue.

En posant

$$2P = A + B + C - 180^\circ,$$

on trouve

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin P \sin(A-P)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B-P)\sin(C-P)}{\sin B \sin C}},$$

$$\tang\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin P \sin(A-P)}{\sin(B-P)\sin(C-P)}}.$$

78. *Formules de Delambre.* On a vu (66) qu'il est utile, dans la résolution des triangles rectilignes, de considérer la demi-somme et la demi-différence de deux angles. Cherchons les quantités $\frac{A+B}{2}$ et $\frac{A-B}{2}$ dans un triangle sphérique.

En substituant les expressions précédentes de $\sin\frac{A}{2}$ et de $\cos\frac{A}{2}$, ainsi que leurs analogues $\sin\frac{B}{2}$ et $\cos\frac{B}{2}$, dans la formule de $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\sin\frac{A+B}{2} &= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2(p-b)\sin(p-c)\sin p}{\sin b \sin^2 c \sin a}} \\ &+ \sqrt{\frac{\sin p \sin^2(p-a)\sin(p-c)}{\sin b \sin^2 c \sin a}} \\ &= \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}.\end{aligned}$$

Or, en comparant ce dernier radical à l'expression précé-

dente de $\cos\frac{A}{2}$, on reconnaît l'égalité

$$\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \cos\frac{C}{2};$$

en second lieu, d'après le n° 59, on a, pour transformer une somme de sinus en un produit,

$$\sin(p-a) + \sin(p-b) = 2\sin\frac{2p-a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$= 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2};$$

enfin, d'après le n° 56, on a

$$\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

On en conclut

$$\cos\frac{c}{2}\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

On trouve, en procédant d'une manière analogue,

$$\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

$$\sin\frac{c}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

Ces quatre équations portent le nom de *formules de Delambre*. Elles donnent, comme le dit M. Le Verrier (*Recherches astronomiques*, tome I, page 28), la solution la plus élégante de la question du III[e] Cas. Soient donnés les deux côtés a, et l'angle C qu'ils comprennent. « Les seconds membres de ces formules ne renferment que les quantités données, tandis que les premiers membres ne renferment que les inconnues. Lorsqu'on aura calculé les

seconds membres, les deux premières équations feront connaître l'angle $\frac{A+B}{2}$ *par sa tangente* et en outre $\cos\frac{c}{2}$; les deux dernières donneront l'angle $\frac{A-B}{2}$ et en outre $\sin\frac{c}{2}$. Connaissant ainsi $\sin\frac{c}{2}$ et $\cos\frac{c}{2}$, on divisera l'un par l'autre, en sorte que le demi-côté $\frac{c}{2}$ sera lui-même déterminé par sa tangente ».

Si la question était celle du IV[e] Cas, les quantités connues seraient dans les premiers membres et les inconnues dans les seconds : on procéderait d'une manière analogue.

79. *Analogies de Néper.* En divisant la première formule de Delambre par la deuxième, et la troisième par la quatrième, puis la quatrième par la deuxième, et la troisième par la première; on trouve les formules qui portent le nom d'*analogies de Néper*. Les voici :

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}.$$

Lorsque l'on connaît deux angles et les côtés opposés, ces formules donnent très-aisément le troisième angle et le troisième côté.

§ VII. USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES DE CALLET. — TYPES DE CALCULS TRIGONOMÉTRIQUES.

80. Les lecteurs connaissent les propriétés générales des logarithmes, ainsi que la disposition et l'usage de la partie des tables de Callet, qui contient les logarithmes des nombres jusqu'à 108 000. Ils savent que, lorsqu'il s'agit d'obtenir le nombre qui répond à un logarithme, il convient que celui-ci soit sous la forme décimale, ayant sa partie fractionnaire positive, sa partie entière étant positive ou négative, selon que le nombre est plus grand ou plus petit que 1. La partie fractionnaire du logarithme ainsi écrit fait connaître, au moyen de la table, la *série des chiffres* significatifs (y compris les zéros intermédiaires) qui compose l'expression du *nombre*; la partie entière, qui s'appelle *caractéristique,* détermine dans le nombre la place de la virgule. La caractéristique s'écrit immédiatement avant la virgule du logarithme; et, si elle est négative, elle est surmontée du signe —.

Exemple : de $\log x = 3,6149394$

et de $\log y = \bar{3},6149394$

on conclut

$$x = 4120,4 \quad \text{et} \quad y = 0,0041204.$$

Lorsqu'on doit multiplier un logarithme négatif, on fait la multiplication à l'ordinaire, jusqu'à ce qu'on arrive à la virgule; on multiplie ensuite la caractéristique et l'on écrit le nombre négatif, somme algébrique du produit négatif de cette multiplication et de la retenue positive donnée par la partie fractionnaire.

Exemple : $\bar{3},6149394 \times 2 = \bar{5},2298788.$

Lorsqu'on doit diviser un logarithme négatif, si la caractéristique n'est pas un multiple du diviseur, on augmente sa valeur absolue du *moindre nombre* nécessaire pour qu'il soit divisible, et l'on fait la division, en ayant soin d'ajouter le même nombre entier à la partie fractionnaire à diviser.

Exemple : $\frac{1}{2}.\bar{5},2298788 = \bar{3},6149394.$

81. Les sinus et cosinus étant moindres que l'unité ont leurs logarithmes négatifs. Si les tables les donnent sous la forme positive, si, par exemple, pour log sin 28° 31′ 10″ on a mis 9,6789342, au lieu de $\bar{1}$,6789342, c'est afin de diminuer autant qu'il est possible les interlignes dans ces tables imprimées. Mais, contrairement à l'opinion de plusieurs auteurs d'ouvrages destinés à l'enseignement, il convient d'écrire toujours les logarithmes des sinus et cosinus, comme ceux de tous les nombres moindres que l'unité, avec leur caractéristique négative; de sorte qu'au lieu des chiffres 9, 8, 7, 6 et 5, qu'on voit dans les tables, à gauche de la partie fractionnaire de ces logarithmes, il est mieux de lire et d'écrire $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ et $\bar{5}$, c'est-à-dire de retrancher les dix unités qui sont de trop (*).

La même observation s'applique aux logarithmes tangentes des angles de 0° à 45°, et aux logarithmes cotangentes des angles de 45° à 90°.

Au contraire, les autres logarithmes tangentes et cotangentes sont dans les tables avec leur valeur non altérée.

(*) L'emploi de la caractéristique seule négative, recommandé dans la première édition de cet ouvrage (1842) et proposé longtemps auparavant (*Cours de Mathématiques* de Francœur, 1819), est adopté à l'Observatoire de Paris (*Recherches astronomiques* de M. Le Verrier, 1855).

82. *Usage des tables trigonométriques.* Dans les tables de logarithmes trigonométriques, chaque colonne a deux titres : l'un en haut, l'autre en bas, disposition fondée sur ce que le sinus et la tangente d'un angle sont aussi le cosinus et la cotangente de l'angle complément. Les minutes et secondes qui se rapportent aux titres supérieurs sont à gauche de la page, celles qui se rapportent aux titres inférieurs sont à droite.

L'inspection d'une table suffit pour vérifier que le logarithme d'une tangente est la différence des logarithmes du sinus et du cosinus du même angle, et que la somme des logarithmes de la tangente et de la cotangente d'un même angle est égale à *zéro*, ce qui résulte des relations

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Lorsque les angles contiennent des parties fractionnaires de *seconde*, ces parties s'écrivent en fractions décimales de la seconde. Les tables de Callet donnent immédiatement le logarithme cherché lorsque l'angle est composé de degrés, minutes et dizaines de secondes.

Pour les autres cas, nous joignons ici un type de la disposition que nous conseillons de donner aux calculs par lesquels on trouve le logarithme demandé quand on connaît l'angle ou réciproquement.

83. *Trouver les logarithmes des quatre principales lignes trigonométriques de l'angle* $A = 8^\circ\, 13'\, 52'', 76$.

$\log \sin A\,[8^\circ\, 13'\, 52'', 76] =$	$\bar{1},155\,8118$
	2912
$d = 1456$	1019
	87
	$\bar{1},155\,8520$

$$\begin{array}{r|r}
\log \operatorname{tang} A\ [8^\circ\, 13'\, 52'',76] = & \bar{1},160\ 3083 \\
 & 2972 \\
d = 1486 & 1040 \\
 & 89 \\
\hline
 & \bar{1},160\ 3493
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
\log \cos A \begin{bmatrix} 8^\circ\, 13'\, 60'' \\ -7,24 \end{bmatrix} = & \bar{1},995\ 5005 \\
 & 217 \\
d = -31 & 6 \\
 & 1 \\
\hline
 & \bar{1},995\ 5027
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r}
\log \cot A \begin{bmatrix} 8^\circ\, 13'\, 60'' \\ -7,24 \end{bmatrix} = & 0,839\ 5431 \\
 & 10402 \\
d = -1486 & 297 \\
 & 59 \\
\hline
 & 0,839\ 6507
\end{array}$$

Explication. A la suite de la notation log sin A, j'écris dans une parenthèse la valeur donnée de cet angle, afin de l'avoir immédiatement sous les yeux dans l'opération à effectuer. J'écris, à la suite de cette parenthèse et du signe $=$, la valeur de $\log \sin 8^\circ\, 13'\, 50''$ lue dans la table, et au-dessous de la parenthèse j'écris $d = 1456$: c'est la *différence*, que donne également la Table, entre le logarithme écrit et celui qui suit ; elle correspond donc à un accroissement de $10''$ que prendrait l'angle. Cela fait, je multiplie cette différence par la fraction $0,276$, qui est (relativement à la dizaine de secondes prise pour unité), ce qui manque à $8^\circ\, 13'\, 50''$ pour faire l'angle A. J'écris, à mesure que je les forme, les produits partiels de cette multiplication, au-dessous du logarithme tabulaire, en n'écrivant pas les centièmes, et me bornant à en joindre les retenues aux dixiè-

mes. Enfin, j'ajoute ces produits partiels au logarithme tabulaire et j'obtiens, en m'arrêtant au septième chiffre fractionnaire, $\log \sin A = \bar{1},1558520$.

La même marche s'applique au calcul du log tang A.

Elle subit une légère modification quand il s'agit du cosinus et de la cotangente.

Après log cos A j'écris dans la parenthèse, au lieu de l'angle A, l'angle immédiatement supérieur qui se trouve dans la table : c'est $8^\circ 14'$ ou $8^\circ 13' 60''$, dont j'écris à la suite le logarithme cosinus donné par cette table. Ce logarithme est trop faible, puisque j'ai pris l'angle trop fort. J'écris au-dessous de $8^\circ 13' 60''$ la différence algébrique $-7'',24$ qu'il faut y joindre pour avoir l'angle A. Plus bas, je pose la *différence* tabulaire -31, que subit le logarithme cosinus quand l'angle *augmente* de $10''$. En multipliant les deux nombres négatifs -31 et $-0,724$, j'obtiens ce qu'il faut aujouter au premier logarithme écrit. Je procède dans cette opération comme dans le cas du sinus, et je trouve $\log \cos A = \bar{1},9955027$.

Le calcul de log cot A est tout à fait analogue à celui de log cos A, parce que la cotangente comme le cosinus diminue quand l'angle augmente.

Faisons les calculs pareils pour un angle supérieur à 45°. Soit $B = 81^\circ 46' 7'',24$. Nous le prenons égal au complément de A; afin que la vérification des résultats soit très-facile. Toute explication est d'ailleurs inutile.

$\log \sin B\ [81^\circ 46'\ 7'',24]$	=	$\bar{1},995\ 5005$
		217
$d = 31$		6
		1
		$\bar{1},995\ 5027$

$\log \operatorname{tang} B\,[81^\circ\,46'\;\;7'',24] =$	$0,839\,5431$
	10402
$d = 1486$	297
	59
	$0,839\,6507$

$\log \cos B \begin{bmatrix} 81^\circ\,46'\,10'' \\ -\,2,76 \end{bmatrix} =$	$\bar{1},155\,8118$
	2912
$d = -\,1456$	1019
	87
	$\bar{1},155\,8520$

$\log \cot B \begin{bmatrix} 81^\circ\,46'\,10'' \\ -\,2,76 \end{bmatrix} =$	$\bar{1},168\,3083$
	2972
$d = -\,1486$	1040
	89
	$\bar{1},160\,3493$

84. *Trouver l'angle auquel appartient une ligne trigonométrique dont le logarithme est donné.* Exemples :

$\log \sin A\,[8^\circ\,13'\,52'',76] =$	$\bar{1},155\,8520$	
	118	$d =$
	4020	1456
	11080	$2'',76$
	8880	

$\log \operatorname{tang} A\,[8^\circ\,13'\,52'',76] =$	$\bar{1},160\,3493$	
	083	$d =$
	4100	1485
	11280	$2'',76$
	8780	

$\log \cos A\,[8^\circ\,13'\,52'',8\;\,] =$	$\bar{1},995\,5027$	
	36	$d = -$
	$-\;\;90$	31
	280	$2'',8$
	32	

log cot A [8° 13′ 52″,76] =	0,839 6507	$d = -$
	917	1486
	− 4100	
	1128	2″,76
	87	

Explication. A la suite de la notation log sin A, j'ouvre une parenthèse que je laisse *en blanc* pour y écrire plus tard l'angle cherché. Plus loin, après le signe =, je pose le logarithme *donné*. Je cherche dans la table, colonne des *sinus*, le logarithme qui approche le plus, au-dessous, du logarithme donné : je trouve $\bar{1}$,1558118 qui est le logarithme de sin 8° 13′ 50. En conséquence, j'écris dans la parenthèse 8° 13′ 5, en laissant encore en blanc les unités et la fraction de seconde. Les trois derniers chiffres du logarithme trouvé dans la table étant différents de ceux qui sont donnés, je les écris au-dessous; et, plus bas, je mets la différence 402; je la multiplie par 10 et je divise 4020 par la différence tabulaire. Le quotient poussé jusqu'à ce que les unités de l'ordre du dernier chiffre donné soient épuisées est le nombre 2,76 à ajouter aux 50″ d'abord obtenues. Pour indiquer que dans la parenthèse on écrit d'abord 8° 13′ 5, puis 2″,76, ces derniers chiffres sont imprimés dans le type qui précède en caractères plus forts.

On trouve de la même manière l'angle dont le logarithme tangente est donné. Mais la marche est un peu différente quand il s'agit du cosinus et de la cotangente.

Dans l'exemple précédent, log cos A = $\bar{1}$,955 5027. Je cherche dans la table, colonne des *cosinus*, le logarithme qui approche le plus, en dessus, du logarithme donné : je trouve $\bar{1}$,995 5036 = log cos 8° 13′ 50. J'écris dans la parenthèse 8° 13′ 5 en laissant en blanc les unités et la fraction de seconde. Les deux derniers chiffres du logarithme trouvé étant seuls différents de ceux du logarithme donné, je les

écris au-dessous; plus bas, je mets la différence qui dans ce cas est négative et égale à -9, et je divise -90 par la différence tabulaire qui est -31. Le quotient 2,8 est le nombre à ajouter aux 50″ déjà écrites. L'angle cherché est donc 8° 13′ 52″,8. L'approximation n'est obtenue qu'à 0″,1 près, parce que la différence tabulaire étant petite n'est exacte qu'à moins de $\frac{1}{60}$ près. En général, quand un angle est petit, on doit éviter de le déterminer par son cosinus.

Cette explication s'applique à la recherche de l'angle dont on connaît le logarithme cotangente.

85. ***Types des calculs pour la résolution des triangles rectilignes (*).***

I[er] Cas. *Données* A, B, C, *a*.

	FORMULE.	SOLUTION.
$A = 79^\circ 57' 40'',94$ $B = 21.34.11,44$ $C = 78.28.\ 7,62$ $a = 2,683\,86$	$b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$	$b = 1,002\,022$

$\log \sin B\ [21^\circ 34' 11'',44]$	=	$\bar{1},565\,4094$
$d = 532$		532
		213
		21
$\log a\ [2,683\,86]$	=	$0,428\,7501$
$d = 162$		972
$\log a \sin B$	=	$\bar{1},994\,1769$
$\log \sin A\ [79^\circ 57' 40'',94]$	=	$\bar{1},993\,2994$
$d = 37$		33
		1
$\log b\ [1,002\,022]$	=	$0,000\,8772$
		64
		80

$d =$
43
0,2

(*) *Observations.* Les types qui précèdent contiennent tous les chiffres et toutes les écritures nécessaires, non-seulement pour obtenir les quantités cherchées, mais encore pour vérifier sans écriture les calculs exécutés. Dans le I[er] Cas, on fait l'addition nécessaire pour avoir $\log a \sin B$ sans réunir séparément les parties dont se composent $\log \sin B$ et $\log a$. Ensuite pour obtenir $\log a \sin B - \log \sin A$ on retranche du premier nombre les sommes partielles dont se compose le second, sans les écrire. C'est un procédé analogue à celui qu'on emploie dans la division de deux nombres entiers, où l'on se dispense d'écrire les produits du diviseur par les chiffres successifs du quotient. Le résultat de la soustraction est 0,000 8764 et doit être le logarithme du nombre inconnu *b*, c'est ce qu'on écrit en mettant à la suite de *b*

IIe Cas. *Données* a, b, A.

	FORMULES.	SOLUTIONS.
$a = 2,683\,86$	$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$	$B = 21^\circ 34' 11'',43$
$b = 1,002\,022$		$C = 78.28.\ 7,63$
$A = 79^\circ 57' 40'',94$	$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$	$c = 2,670\,57$

$\log b\,[1,002\,022]$	=	0,000 87639	
$d = 433$		87	
$\log \sin A\,[79^\circ 57' 40'',94]$	=	$\bar{1}$,993 2994	
$d = 37$		33	
		1	
$\log b \sin A$	=	$\bar{1}$,994 1770	
$\log a\,[2,683\,86]$	=	0,428 7501	
$d = 162$		972	
$\log \sin B\,[21^\circ 34' 11'',46]$	=	$\bar{1}$,565 4172	
$A = 79.57.40,94$		094	
$C = 78.28.\ 7,60$		780	$d = 532$
180°		2480	
		352	1,46
$\log a\,[2,683\,86]$	=	0,428 75982	
$\log \sin C\,[78^\circ 28'\ 7'',60]$	=	$\bar{1}$,991 1412	
$d = 43$		301	
		26	
$\log a \sin C$	=	0,419 9043	
$\log \sin A$	= ci-dessus	$\bar{1}$,993 2997	
$\log c\,[2,670\,57]$	=	0,426 6046	$d = 163$
		5926	
		1200	7

---

une parenthèse en *blanc* dans laquelle on écrit ensuite le nombre qui, d'après la table, répond au logarithme qu'on vient d'obtenir.

Les types des autres cas donneraient lieu à des explications analogues que les lecteurs trouveront d'eux-mêmes en refaisant les calculs indiqués.

Nous ne croyons pas nécessaire de placer ici des types pour la disposition des écritures relatives à la résolution des triangles sphériques.

IIIe Cas. *Données* a, b, C.

	FORMULES.	SOLUTIONS.
$a = 2,683\ 86$ $b = 1,002\ 022$ $C = 78°\ 28'\ 7'',60$	$\tang A = \dfrac{a \sin C}{b - a \cos C}$ $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$	$A = 79°\ 57'\ 40'',93$ $c = 2,670\ 57$

$\log a\,[2,683\ 86] = 0,428\ 7501$
$d = 162$ — 972

$\log \sin C\,[78°\ 28'\ 7'',60] = \bar{1},991\ 1412$
$d = 43$ — 301, 26

$\log a \sin C = 0,419\ 9043.$

$\log \cos C \begin{bmatrix} 78°\ 28'\ 10'' \\ -\ 2,4 \end{bmatrix} = \bar{1},300\ 7921$
$d = -1032$ — 2064, 413

$\log a \cos C\,[0,536\ 5086] = \bar{1},729\ 5767$
$b = 1,002\ 0220$ — 697

$b - \log a \cos C = 0,465\ 5134$ — 70, 65, 5 | $d = 81$ | 0,86

$d = 93$

$\log$ » $= \bar{1},667\ 9290$
28
4

$\log \tang A\,[79°\ 57'\ 40'',93] = 0,751\ 9721$
607 — 11400, 357 | $d = 1227$ | 0,93

$\log \sin A\,[$ » $] = \bar{1},993\ 2994$
$d = 37$ — 33, 1

$\log c\,[2,670\ 57] = 0,426\ 6046$
5926 — 120 | $d = 163$ | 0,7

IV[e] Cas. *Données* a, b, c.

	FORMULE.	SOLUTION.
$a = 2{,}683\ 86$ $b = 1{,}002\ 02$ $c = 2{,}670\ 57$ $2p = 6{,}356\ 45$ $p = 3{,}178\ 225$	$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	$A = 79^\circ 57' 41'',8$

$$\log(p-b)\,[2{,}176\ 205] = 0{,}337\ 6988$$
$$d = 200 \qquad 10$$
$$\log(p-c)\,[0{,}507\ 655] = \bar{1}{,}705\ 5644$$
$$d = 86 \qquad 43$$
$$\log(p-b)(p-c) = 0{,}043\ 2685$$

$$\log b\,[1{,}002\ 02] = 0{,}000\ 8764$$
$$\log c\,[2{,}670\ 57] = 0{,}426\ 5926$$
$$114$$
$$\log bc = 0{,}427\ 4804$$
$$\log \sin^2\frac{A}{2} = \bar{1}{,}615\ 7881$$
$$\log \sin\frac{A}{2}\,[39^\circ 58' 50'',9] = \bar{1}{,}807\ 8940$$
$$A = 79^\circ 57' 41'',8 \qquad 18 \qquad 2200 \qquad d = 251 \qquad 0{,}9$$

§ VIII. PROBLÈMES DIVERS DE TRIGONOMÉTRIE.

86. Trigonométrie rectiligne.—I. *Trouver la distance* AB (*fig.* 16) *entre deux points inaccessibles*. On mesurera une base CD, et les quatre angles ACD, BCD, ADC, BDC que font avec elle les droites ou rayons visuels dirigés de ses extrémités C et D vers A et B. On mesurera aussi l'angle ACB qui ne sera pas la différence des angles ACD et BCD si les deux droites DA et CB ne sont pas dans un même plan. On résoudra les triangles ACD et BCD (64); puis connaissant les côtés CA et CB du triangle ACB et l'angle

mesuré ACB qu'ils comprennent, on en conclura la distance AB (66).

II. *Réduire à l'horizon un triangle dont une base est horizontale.* Le point A (*fig.* 17) ayant été observé des deux extrémités d'une base *horizontale* BC, les côtés et les angles du triangle ABC sont supposés connus. Il s'agit de calculer les côtés BA′, CA′ et les angles du triangle BCA′, projection horizontale du triangle BCA. A cet effet, on mesurera les angles ABA′, ACA′ que les droites AB et AC font avec l'horizon. On calculera $BA' = BA \cos ABA'$ et $CA' = CA \cos ACA'$. Connaissant ainsi les trois côtés du triangle A′BC, on calculera ses angles (67).

III. Les quatre points A, B, C et D (*fig.* 16) étant dans dans un même plan, on connaît les côtés et les angles du triangle ABC, et les angles BDA, ADC désignés par β et γ; il s'agit de résoudre les deux triangles ABD et ADC.

Soient $AC = b$, $AB = c$, angle $BAC = A$, angle $ABD = x$, angle $ACD = y$. Les deux triangles ABD, ACD fournissent deux expressions égales du côté commun AD, savoir (64) :

$$(1) \qquad \frac{\text{in}\, x}{\sin\beta} = \frac{b \sin y}{\sin\gamma},$$

la somme des angles du quadrilatère ABCD donne

$$(2) \qquad x + y + A + \beta + \gamma = 360^\circ.$$

Connaissant ainsi $x + y$, on cherche $x - y$ par un procédé analogue à celui du n° 66, 3°.

De l'équation (1) on tire, en posant

$$(3) \qquad \frac{c \sin\gamma}{b \sin\beta} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tang}\varphi.$$

On en conclut

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{1 + \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}\varphi} = \frac{\operatorname{tang}45^\circ + \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{tang}45^\circ \operatorname{tang}\varphi},$$

d'où (57 et 59)

$$(4)\qquad \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\sin\frac{x-y}{2}} = \text{tang}(45^\circ + \varphi).$$

Les équations (2) et (3) faisant connaître $\frac{x+y}{2}$ et φ, l'équation (4) donne $\frac{x-y}{2}$; on en conclura x et y. Ainsi dans chacun des triangles ABD et ADC on connaîtra deux angles et un côté, ce qui ramène au cas du n° 64.

IV. Trouver la relation entre le nombre de degrés d'un arc de cercle a, la corde c qui le sous-tend et son rayon r.

En menant du centre une perpendiculaire sur la corde, on a un triangle rectangle qui donne la relation cherchée

$$\frac{c}{2} = r \sin\frac{a}{2}.$$

Il suffira de connaître deux des quantités a, c, r pour en conclure la troisième.

87. Trigonométrie sphérique. — I. *Étant données les longitudes et les latitudes de deux points* A *et* B *du globe terrestre, trouver leur distance en degrés.* Les latitudes sont comptées positivement si elles sont boréales, les longitudes sont supposées positives vers l'est, et la longitude du point B est supposée plus grande que celle de A. Cela admis, si C est le pôle boréal, les trois points A, B et C sont les sommets d'un triangle sphérique, dont deux côtés sont donnés, savoir AC $= 90^\circ -$ latitude de A, BC $= 90^\circ -$ latitude de B; et l'angle C du même triangle, compris entre ces mêmes côtés est la différence connue des deux longitudes. La distance demandée est le troisième côté qu'on trouvera comme au n° 75, III[e] Cas, ou au n° 78.

II. *Réduire un angle à l'horizon.* On connaît (*fig.* 18) les angles MSA $= c$, NSA $= b$ que deux droites SM, SN font avec la verticale SA, et l'angle MSN $= a$ de ces droites entre elles. On cherche l'angle formé par leurs projections horizontales. Si par un point A quelconque de la verticale SA, on suppose les deux droites AB et AC horizontales et par conséquent perpendiculaires à SA, l'angle BAC est celui qu'on cherche et mesure le dièdre A opposé à la face a du trièdre dont les deux autres faces sont b et c. Le problème se réduit au Ier CAS du n° 75.

Les trois angles a, b et c ont pu être obtenus sans que l'observateur se soit transporté en S, au moyen de deux stations en M et N. L'angle a est le supplément de la somme des deux angles NMS, MNS, et les angles b et c sont les compléments de ceux que les droites NS et MS font avec les horizontales menées par N et par M dans les plans verticaux NSA et MSA.

Table des nombres trigonométriques naturels.

DEGRÉS.	SINUS	TANG	COTANG	COSINUS	
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6362	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3137	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2680	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2868	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4750	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
	COSINUS	COTANG	TANG	SINUS	DEGRÉS.

DEGRÉS.	SINUS	TANG	COTANG	COSINUS	
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4825	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	COSINUS	COTANG	TANG	SINUS	DEGRÉS.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES PAR LEURS ÉQUATIONS.

§ I. GÉNÉRALITÉS SUR CE SUJET.

1°. Coordonnées parallèles à des axes concourants.

88. L'emploi des coordonnées, qui (n°s 7 et 13) sert à désigner la position d'un point dans un plan ou dans l'espace, fournit aussi le moyen d'exprimer algébriquement la situation d'une suite de points soumis à une même loi, et formant soit une ligne, soit une surface : il suffit pour cela d'écrire en une ou plusieurs équations les relations qui lient entre elles les coordonnées algébriques d'un même point pris arbitrairement parmi ceux dont il s'agit. C'est ce qui va s'éclaircir en considérant les divers cas renfermés dans cet énoncé général.

89. S'il s'agit d'une courbe plane, on imaginera dans son plan deux axes coordonnés Ox, Oy, et l'on tâchera de tirer de la définition de la courbe une équation qui exprime la relation entre les coordonnées x, y, d'un point quelconque de cette courbe. Cette équation entre les *variables* x, y, et les quantités *constantes* fournies par la question, s'appelle l'*équation de la courbe rapportée aux axes coordonnés* Ox, Oy.

Exemples. 1°. Un cercle dont le rayon est r, et dont le centre est à l'origine des coordonnées rectangulaires, a pour équation (12)

$$y^2 + x^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

2°. Un cercle tangent à l'axe des x, au point pris pour origine des axes rectangulaires, a pour équation

$$(y-r)^2+x^2=r^2 \quad \text{ou} \quad y^2-2ry+x^2=0,$$

ou encore

$$y=r\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Cette équation peut servir à tracer par points sur le terrain un arc de cercle, d'un très-grand rayon connu, tangent à une droite donnée.

Lorsque, pour aider le raisonnement, on veut exprimer de la manière la plus générale l'équation d'une courbe en coordonnées x, y, on la représente par le symbole $F(x, y)=0$, dont l'énoncé est : *fonction de x et de y égale zéro*, ou par $y=F(x)$, dont l'énoncé est : *y égale fonction de x*. Dans ce second cas, on suppose que l'équation est résolue par rapport à y.

Généralement on entend par *une fonction d'une ou de plusieurs variables* l'expression d'opérations quelconques à faire sur ces variables, combinées soit entre elles, soit avec des constantes.

90. S'il s'agit d'exprimer algébriquement une ligne à double courbure (c'est-à-dire non située dans un plan), ou plus généralement une courbe située d'une manière quelconque par rapport à trois axes coordonnés, la question se réduit à trouver deux équations auxquelles doivent satisfaire les trois coordonnées x, y, z, de tout point de cette courbe. Si l'une des équations ne renferme que deux coordonnées, elle est l'équation de la projection de la courbe sur le plan des deux axes coordonnés correspondants : car, pour un point quelconque de la courbe dans l'espace, les coordonnées x, y, par exemple, sont les mêmes que celles de sa projection sur le plan des x et y.

Exemple. Si la courbe est située sur une sphère dont le

La position du point M dans ce plan sera déterminée par deux quantités, savoir :

1°. L'angle uOx ou α que décrirait une droite Ou pour passer de la direction Ox à la direction OM;

2°. L'abscisse u, du point M, sur la droite Ou : cette abscisse prend le nom de *rayon vecteur*.

Ces deux quantités, α, u, s'appellent *coordonnées polaires*. On peut, en les prenant toutes deux positives, exprimer la position d'un point donné quelconque dans le plan; mais rien n'empêche d'admettre aussi des coordonnées polaires négatives, et, moyennant cette convention, la position d'un même point peut être exprimée par quatre systèmes équivalents de deux coordonnées. *Exemple :*

$$\begin{cases}\alpha = 120^\circ,\\ u = 0^m,5,\end{cases} \begin{cases}\alpha = 300^\circ,\\ u = -0^m,5,\end{cases} \begin{cases}\alpha = -240^\circ,\\ u = 0^m,5,\end{cases} \begin{cases}\alpha = -60^\circ,\\ u = -0^m,5.\end{cases}$$

95. Une courbe peut être exprimée en coordonnées polaires.

Exemples. 1°. Dans ce système, l'équation du cercle dont le rayon est r, en prenant l'origine au centre, serait $u = r$.

2°. Si, en même temps que la droite indéfinie Ou tourne autour du point O, on suppose que le point M se meuve de manière que les accroissements successifs du rayon vecteur u soient proportionnels à ceux de l'angle α, la courbe décrite est la *spirale d'Archimède*, et son équation est $u = a\alpha + b$, en désignant par b la longueur du rayon vecteur qui correspond à $\alpha = 0$, et par a l'accroissement de u pour chaque unité de α.

3°. Coordonnées focales.

96. La position d'un point dans un plan pourrait être définie par ses distances à deux points donnés dans ce plan.

Ce mode de détermination est quelquefois employé dans le *lever des plans*.

Si F et F′ sont deux points donnés à priori, et si u et u' sont les distances respectives d'un point M à F et F′, ces deux quantités, étant déterminées, appartiendront à deux points rectangulairement symétriques par rapport à la droite FF′.

Une équation entre les distances u, u', considérées comme variables, peut servir à exprimer une courbe rectangulairement symétrique par rapport à la droite FF′.

Exemples. 1°. Si la somme $u + u'$ est constante, la courbe s'appelle une *ellipse*, dont les points F, F′ sont les *foyers*. Étant données la distance $FF' = 2c$ et l'équation $u + u' = 2a$, il est aisé de construire la courbe par points (*fig.* 26); on peut même la concevoir décrite d'un mouvement continu à l'aide d'un fil dont la longueur serait $2a$, et dont les extrémités seraient attachées aux foyers F, F′; une pointe traçante qui glisserait le long du fil en le tenant toujours tendu décrirait la courbe.

2°. Si la différence $u - u'$ ou $u' - u$ est constante, la courbe s'appelle une *hyperbole*, dont F et F′ sont les *foyers*. Étant données la distance $FF' = 2c$ et l'équation $u - u' = \pm 2a$, ou $(u - u')^2 = 4a^2$, on construit facilement la courbe par points (*fig.* 27). On peut aussi en décrire d'un mouvement continu un arc d'une certaine étendue : une règle tourne dans le plan de manière que l'un de ses points, toujours le même (*fig.* 20), se confonde avec l'un des foyers F; un fil NMF′ est attaché, d'une part à un point N de la règle, d'autre part au second foyer F′, et la distance FN excède de $2a$ la longueur de ce fil; une pointe M, qui glisse le long de la règle, en tendant le fil, trace la courbe, car on a

$$FM - F'M = FN - F'MN = 2a.$$

97. Les mêmes équations

$$u + u' = 2a, \quad (u - u')^2 = 4a^2,$$

exprimeraient des surfaces de révolution autour de la droite FF′ si le point M, auquel appartiennent les distances u, u', n'était pas assujetti à rester dans un même plan. Ces surfaces seraient, l'une un *ellipsoïde*, l'autre un *hyperboloïde* de révolution, ayant F et F′ pour *foyers*.

98. La position d'un point M dans un plan pourrait encore être définie par sa distance MN à une droite donnée AB du plan (*fig.* 21), et sa distance MF à un point donné F dans le même plan. La même définition, dans ce cas, appartiendrait à deux points rectangulairement symétriques par rapport à la perpendiculaire FC sur AB.

Si l'on désigne FM par u, et MN par u', une équation entre u et u', considérés comme variables, exprimera une courbe symétrique par rapport à CF.

Exemple. L'équation $u = u'$, ainsi interprétée, est celle d'une courbe appelée *parabole*, facile à construire par points. On peut en décrire par un mouvement continu un arc d'une certaine étendue à l'aide d'une équerre KLN qui glisse selon la directrice AB, et d'un fil attaché, d'une part au point L de l'équerre, et de l'autre au foyer F, la longueur de ce fil étant égale à NL; une pointe qui glisse le long de l'équerre en tendant le fil décrit la parabole, car on a

$$\text{FM} = \text{FML} - \text{ML} = \text{MN}.$$

99. u étant toujours la distance de M au foyer F, si u' était sa distance au plan projeté en AB dans la figure, l'équation $u = u'$ exprimerait une surface appelée *paraboloïde* de révolution (*).

(*) La cycloïde dont il sera question au n° 157 est un autre exemple d'une courbe exprimable par l'égalité de deux variables coordonnées.

100. Les exemples précédents donnent lieu à quelques remarques générales.

1°. Une équation à plusieurs variables peut renfermer toute la définition d'une courbe ou d'une surface, et fournir le moyen de la construire; mais il faut toujours pour cela qu'une convention établisse la signification géométrique des variables, signification en vertu de laquelle des valeurs simultanées de ces variables déterminent un ou plusieurs points.

2°. Deux courbes égales, c'est-à-dire superposables, ont des équations différentes dans deux systèmes différents de coordonnées, par exemple quand on change l'angle des axes coordonnés.

3°. Une même équation désigne des courbes différentes si l'on change la signification géométrique des variables.

101. Le système des coordonnées parallèles à deux axes dans un plan, ou à trois axes dans l'espace, est le plus fréquemment employé. Dans ce système, l'équation de la droite et celle du plan sont du premier degré. Nous allons donner quelques détails sur son application à la droite et à quelques courbes, puis aux plans et aux surfaces dont les équations sont du second degré.

§ II. DE LA LIGNE DROITE.

102. *Toute ligne droite située dans le plan de deux axes coordonnés faisant un angle quelconque est exprimée par une équation du premier degré, qui appartient à tous ses points et n'appartient à aucun autre.*

Pour le démontrer, considérons d'abord des cas particuliers.

1°. *Si la droite se confond avec l'un des axes ou lui est parallèle, l'équation ne contient qu'une variable.*

En effet, l'équation $x = 0$ appartient exclusivement à

tous les points de l'axe des y, et l'équation $x = c$ (constante) à ceux d'une parallèle à l'axe des y.

2°. *Si la droite passe par l'origine, son équation est de la forme* $y = ax$, le coefficient a étant un nombre abstrait affecté d'un signe + ou —.

En effet, soient sur cette droite des points quelconques M', M'', M''', dont les coordonnées sont x', y'; x'', y''; x''', y''',... : il est évident qu'on a, quels que soient les signes de ces coordonnées,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} \cdots$$

C'est ce qu'on exprime en disant que le rapport $\frac{y}{x}$ est constant, et en posant l'équation $y = ax$.

Le coefficient a est un nombre abstrait positif lorsque la droite divise l'angle xOy et son opposé ; il est négatif quand elle divise les deux autres angles des axes coordonnés.

Si les axes Ox, Oy, font l'angle θ, et que la droite M'M''... fasse avec Ox l'angle α, il est aisé de voir (64) qu'on a

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} = a;$$

c'est pourquoi a s'appelle *coefficient angulaire*. Quand il est donné, ainsi que l'angle θ des deux axes coordonnés, on peut en conclure l'angle α. On trouve aisément

$$\tan \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}.$$

Si les axes Ox, Oy, sont rectangulaires, le rapport a est simplement égal à tang α ; nous l'appellerons, pour abréger, l'*inclinaison* de la droite sur l'axe des x ; son inverse $\frac{1}{a}$ est l'inclinaison de la droite sur l'axe des y.

Les coordonnées x et y, considérées comme appartenant

successivement à divers points d'une droite passant par l'origine, sont, dans tous les cas, des *variables directement proportionnelles*, même lorsqu'elles sont de signes contraires.

3°. *Si la droite n'est ni parallèle à un axe ni passant par l'origine, son équation est de la forme* $y = ax + b$, la constante a ayant la même nature abstraite et la même valeur en fonction des angles que dans le cas précédent, et b étant une longueur affectée d'un signe + ou —, qu'on appelle l'*ordonnée à l'origine.*

Cela devient évident en traçant par l'origine une droite parallèle à celle dont il s'agit, et en remarquant que, pour une même abscisse, les coordonnées des droites diffèrent entre elles d'une longueur constante.

103. Dans le cas de l'équation $y = ax + b$, les variables x, y, ne sont plus proportionnelles, mais leurs accroissements à partir de deux valeurs correspondantes quelconques sont dans un rapport constant égal à a. En effet, si x et y, x' et y', x'' et y'',..., expriment deux à deux des valeurs simultanées satisfaisant à l'équation de la droite, on a

$$y = ax + b, \quad y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b, \ldots,$$

et l'on en conclut

$$y' - y = a(x' - x), \quad y'' - y = a(x'' - x), \ldots,$$

d'où

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{y'' - y}{x'' - x} = \ldots = a.$$

Les différences $x' - x$, $x'' - x, \ldots$, qui peuvent être positives ou négatives, s'appellent les *accroissements algébriques* des x, et se représentent par la notation Δx. Les différences $y' - y$, $y'' - y, \ldots$, qu'on représente par Δy, sont les *accroissements algébriques* des y. La propriété

dont il s'agit s'écrit donc ainsi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

et s'énonce en disant que les *accroissements simultanés des variables x et y sont proportionnels.*

Les sciences physico-mathématiques offrent des cas nombreux d'une pareille loi : par exemple la dilatation d'un corps, c'est-à-dire son accroissement soit de volume, soit de longueur, est, entre certaines limites, proportionnelle à son accroissement de température, toutes circonstances égales d'ailleurs.

104. Dans un système d'axes déterminé, on peut toujours trouver une droite telle, que les constantes a, b, de son équation, aient des valeurs *données* quelconques, positives ou négatives. Il suit de là que, réciproquement à la proposition précédente, *dans un système quelconque d'axes coordonnés, une équation de premier degré $Ay + Bx + C = 0$ entre les coordonnées x, y, dans laquelle A et B sont des nombres ou des rapports donnés, et C une longueur donnée, est toujours celle d'une ligne droite, qu'il est facile de construire, quels que soient les signes des constantes A, B et C.*

105. *Trouver l'équation d'une droite ayant une inclinaison donnée, et passant par un point donné.*

Soit a le coefficient angulaire résultant de l'inclinaison donnée, et soit b l'ordonnée inconnue à l'origine; les coordonnées x, y, d'un point quelconque de la droite, satisferont à l'équation

$$(1) \qquad y = ax + b.$$

Les coordonnées x', y', du point donné, doivent satis-

faire à la même équation. On a donc

$$(2) \qquad y' = ax' + b.$$

Cette dernière équation détermine b, qu'on peut substituer dans l'équation (1). Plus simplement par la soustraction on a

$$y - y' = a(x - x').$$

On vérifie aisément que cette équation satisfait aux deux conditions de l'énoncé. On peut l'obtenir immédiatement à l'aide d'une figure.

106. *Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés* (x', y') (x'', y'').

Soit a le coefficient angulaire inconnu de x : les coordonnées x, y, d'un point quelconque, satisferont, d'après le numéro précédent, à l'équation

$$(1) \qquad y - y' = a(x - x'),$$

qui exprime déjà que la droite passe par le point (x', y'), c'est-à-dire dont les coordonnées sont x', y'.

Les coordonnées du second point x'', y'', doivent satisfaire à la même équation; on a donc

$$(2) \qquad y'' - y' = a(x'' - x').$$

Cette dernière relation détermine a, dont on substitue l'expression dans l'équation (1). On arrive ainsi à

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

ou

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{y' x'' - y'' x'}{x'' - x'}.$$

L'équation s'obtiendrait immédiatement sous la première forme, soit à l'aide d'une figure, soit par la propriété re-

marquée au nº 103. On vérifie sans calcul qu'elle satisfait à la double condition de l'énoncé.

Sous la seconde forme, l'équation est symétrique relativement aux points donnés, c'est-à-dire qu'elle reste la même si l'on change x' et y' en x'' et y'', et réciproquement.

Si les deux points donnés sont l'un sur l'axe des x, à une distance p de l'origine, l'autre sur l'axe des y, à la distance q, l'équation se réduit à

$$\frac{y}{q}+\frac{x}{p}=1.$$

107. *Déterminer le point d'intersection de deux droites dont on a les équations.* En général, deux lignes quelconques étant données par leurs équations, la recherche de leurs points communs se réduit à résoudre ces deux équations considérées comme renfermant *deux inconnues*, x et y, qui cessent d'être des variables indéterminées.

Réciproquement lorsqu'on a à résoudre deux équations à deux inconnues, si l'on parvient à construire deux lignes, droites ou courbes, exprimées par ces équations, les intersections des lignes fournissent graphiquement autant de solutions du problème.

108. *Équations de deux droites perpendiculaires entre elles.* Dans un système de coordonnées rectangulaires, la condition pour que deux droites dont les équations sont

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b',$$

soient perpendiculaires entre elles, est (54) que les coefficients a, a', satisfassent à la relation $aa'+1=0$.

Application. *Démontrer que les droites menées des sommets d'un triangle perpendiculairement aux côtés opposés se coupent en un même point.*

Soit QPP′ le triangle (*fig.* 22), et soit O l'origine des

axes rectangulaires Ox, Oy. Faisons $OQ = q$, $OP = p$ et $OP' = p'$. La droite PQ a pour équation (106)

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1, \quad \text{ou} \quad y = -\frac{q}{p}x + q.$$

Son coefficient angulaire est $a = -\frac{q}{p}$ (ce qu'on pourrait voir à prioi i, puisque la tangente de l'angle QPx, supplément de QPO, est $-\frac{q}{p}$), et par conséquent le coefficient angulaire de la droite P′M, perpendiculaire à PQ, est

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{p}{q};$$

d'où il suit que cette droite P′M, passant par P′ dont les coordonnées sont $y' = 0$ et $x' = -p'$, a pour équation

$$y = \frac{p}{q}(x + p') = \frac{px}{q} + \frac{pp'}{q}.$$

L'équation de la droite PM′ perpendiculaire à P′Q s'obtient de même et ne diffère de la précédente qu'en ce que p est remplacé par $-p'$ et *vice versâ*. Elle est donc

$$y = -\frac{p'}{q}(x - p) = -\frac{p'x}{q} + \frac{pp'}{q}.$$

En faisant dans chacune de ces équations $x = 0$, on trouve *la même ordonnée* à l'origine $\frac{pp'}{q}$, distance du point O au point N où les deux droites P′M et PM′ rencontrent QO.

§ III. DU CERCLE.

109. Dans un système de coordonnées rectangulaires, la circonférence du cercle dont le rayon est ρ et dont le centre a pour coordonnées α et β est (24) exprimée par

l'équation

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\rho^2.$$

110. Si le centre est à l'origine des coordonnées, on a

$$\beta=0, \quad \alpha=0;$$

l'équation devient

$$y^2+x^2=\rho^2, \quad \text{d'où} \quad y^2=(\rho+x)(\rho-x):$$

donc l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre.

L'équation du cercle dont le centre est à l'origine s'écrit souvent sous la forme

$$y=\pm\sqrt{\rho^2-x^2}.$$

111. Si l'on fait $\beta=0$, $\alpha=\rho$ (*fig.* 23), l'équation est

$$y^2+x^2=2\rho x.$$

x^2+y^2 est le carré de la corde OM: donc OM est moyenne proportionnelle entre le diamètre 2ρ et l'abscisse x.

Si l'on fait OM $=z$, l'équation précédente donne

$$z^2=2\rho x, \quad \text{ou} \quad \frac{z}{x}=\frac{2\rho}{z};$$

donc les triangles OMP, OMA, sont semblables, et l'angle OMA est droit (MP est antiparallèle à AM dans l'angle MOA).

112. *Réciproque du n° 109.* Toute équation de la forme

$$y^2+x^2+Dy+Ex+F=0$$

entre des coordonnées rectangulaires, dans laquelle D, E, sont des longueurs, et F le produit de deux longueurs, est l'équation d'un cercle, à moins qu'elle ne soit impossible.

En effet, cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(y^2+Dy+\frac{D^2}{4}\right)+\left(x^2+Ex+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F,$$

ou

$$\left(y+\frac{D}{2}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F,$$

d'où l'on conclura que les coordonnées du centre et le rayon sont

$$\beta=-\frac{D}{2},\quad \alpha=-\frac{E}{2},\quad \rho=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}.$$

Il y a impossibilité si ρ est imaginaire, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}<F.$$

Si $F=0$, la courbe passe par l'origine.

113. On détermine facilement les intersections du cercle précédent avec les axes, avec une droite donnée, ou avec un autre cercle (107).

114. *Trouver le lieu des points* M (*fig.* 24) *dont les distances* MA, MB, *à deux points fixes* A, B, *sont dans un rapport constant* $m:n$.

Soit $AB=a$: on a, relativement aux axes Ax et Ay,

$$MA^2=y^2+x^2,\quad MB^2=y^2+(x-a)^2;$$
$$MA^2:MB^2::m^2:n^2;$$

d'où l'on conclut

$$n^2(y^2+x^2)=m^2(y^2+x^2-2ax+a^2).$$

Si $m=n$, l'équation se réduit à $x=\frac{a}{2}$, et exprime une ligne droite perpendiculaire à AB.

Si m diffère de n, l'équation est celle d'un cercle

$$y^2 + x^2 - \frac{2am^2}{m^2 - n^2} x + \frac{a^2 m^2}{m^2 - n^2} = 0.$$

115. *Trouver le lieu géométrique des points* M, M′, M″ (*fig.* 25), *tels, que les distances* AM, AM′, AM″, *à un point fixe* A, *sont réciproquement proportionnelles aux distances* AN, AN′, AN″, *les points* N, N′, N″, *étant sur une droite.* En d'autres termes, il faut que le produit AN.AM soit constant, quelle que soit la direction ANM.

On prend l'axe Ax perpendiculaire à la droite NN″. Soient AB $= a$ et AN.AM $= ab$; on a

$$\text{AM} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \text{AN} : \text{AM} :: a : x,$$

d'où, en multipliant les deux premiers termes de cette pro portion par AM, et substituant pour AN.AM et AM^2 leurs valeurs, on conclut

$$ab : x^2 + y^2 :: a : x, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = bx,$$

équation d'un cercle. On vérifie très-aisément cette propriété du cercle par la similitude des triangles ANB, AMD.

§ IV. ÉQUATIONS DE L'ELLIPSE, DE L'HYPERBOLE ET DE LA PARA BOLE, DÉDUITES DES PROPRIÉTÉS FOCALES DE CES COURBES.

116. L'ellipse a été définie au n° 96, Ier exemple.

Soient F, F′, les *foyers* (*fig.* 26); ρ, ρ', les *rayons vecteurs* dont la somme constante est $2a$. O, milieu de FF′, est le *centre*. Si l'on prend OA $=$ OA′ $=$ A, les points A et A′ appartiennent à la courbe; car, pour le point A, par exemple, on a

$$\text{AF} + \text{AF}' = (a - \text{FO}) + (a + \text{OF}') = 2a.$$

Désignant FF′ par $2c$, on a nécessairement $a > c$, car

un quelconque des triangles tels que FMF′ donne

$$FM + F'M > FF', \quad \text{ou} \quad 2a > 2c.$$

Le rapport $\frac{c}{a}$ ou $\frac{OF}{OA}$ s'appelle *excentricité*; AA′ et CC′ sont les axes principaux, savoir :

$$\text{grand axe } AB = 2a, \quad \text{petit axe } DC = 2\sqrt{a^2 - c^2}.$$

117. Cherchons l'équation de l'ellipse rapportée à ses deux axes principaux pris pour axes coordonnés : l'équation aura ainsi sa forme la plus simple, puisque la courbe est symétrique relativement aux deux axes. L'un des rayons vecteurs étant désigné par ρ, l'autre est $2a - \rho$, et l'on a, d'après la figure,

$$\rho^2 = y^2 + (c + x)^2,$$

et

$$(2a - \rho)^2 = y^2 + (c - x)^2.$$

Il ne reste qu'à éliminer ρ : on a par soustraction

$$4a\rho - 4a^2 = 4cx, \quad \text{d'où} \quad \rho = a + \frac{cx}{a},$$

et en substituant cette expression de ρ dans l'une ou l'autre des équations précédentes,

$$a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + x^2,$$

ou bien

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2).$$

118. L'hyperbole a été définie au n° 96, IIe exemple.

Soient les *foyers* F, F′ (*fig.* 27); les *rayons vecteurs* ρ, ρ', dont la différence constante est $2a$. Le milieu O de FF′ est le *centre*. Soit la distance des foyers $FF' = 2c$. On voit par le triangle FMF′ que l'on a $a < c$.

Si l'on prend $OA = OB = a$, les points A et B appar-

tiennent à la courbe. La distance $AB = 2a$ s'appelle l'*axe transverse*.

La courbe n'a pas de point sur Oy perpendiculaire à AB.

119. Cherchons l'équation de l'hyperbole rapportée à ses *axes* principaux, c'est-à-dire aux axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, dont l'un passe par les deux foyers, et l'autre par le centre. L'un des rayons vecteurs étant représenté par ρ, l'autre l'est par $\pm(\rho - 2a)$, et l'on a

$$\rho^2 = y^2 + (c + x)^2,$$
$$(\rho - 2a)^2 = y^2 + (x - c).$$

Ces dernières équations, étant algébriquement les mêmes qu'au n° 117, donnent la même valeur de $\rho = a + \frac{cx}{a}$ et la même équation finale qui, à cause de $a < c$, doit s'écrire sous la forme

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2).$$

120. En faisant, dans l'équation (n° 117) de l'ellipse, $a^2 - c^2 = b^2$, et dans celle (n° 119) de l'hyperbole, $c^2 - a^2 = b^2$, on a pour l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

et pour l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1.$$

121. Réciproquement toute équation en coordonnées rectangulaires, de la forme

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^3} = 1,$$

est celle d'une ellipse dont les axes sont $2p$ selon les x, et $2q$ selon les y; l'axe contenant les foyers est le plus grand des deux.

Toute équation de la forme

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = \pm 1,$$

est celle d'une hyperbole, l'axe transverse étant $2p$ ou $2q$ selon que le second membre est positif ou négatif, c'est-à-dire selon que l'axe des x rencontre ou non la courbe.

122. Étant donnée l'équation d'une courbe, on peut en déduire toutes les propriétés de cette ligne. C'est ce qu'on appelle *discuter* une équation. On ne s'attachera ici qu'aux conséquences les plus immédiates des équations de l'ellipse et de l'hyperbole.

De l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

on conclurait, si on ne le savait déjà,

1°. Que l'origine est un *centre*, c'est-à-dire le milieu de toutes les cordes passant par ce point : car, si x et y sont les coordonnées d'un point, les coordonnées $-x$ et $-y$ d'un point diamétralement opposé satisfont également à l'équation ;

2°. Que chacun des axes coordonnés coupe en leurs milieux les cordes parallèles à l'autre : car, si x et y sont les coordonnées d'un point, les deux autres points dont les coordonnés sont $-x$ et y pour l'un, x et $-y$ pour l'autre, sont également sur la courbe ;

3°. Que les longueurs des parties des deux axes coordonnés interceptées dans la courbe sont $2p$ sur l'axe des x et $2q$ sur l'axe des y : car, en faisant $y = 0$, on trouve $x = \pm p$; et pour $x = 0$, $y = \pm q$.

En résolvant l'équation par rapport à l'une des varia-

bles, y par exemple, on a

$$y = \pm \frac{q}{p}\sqrt{p^2 - x^2}.$$

Le facteur $\sqrt{p^2 - x^2}$ ou $\sqrt{(p+x)(p-x)}$ est une moyenne proportionnelle entre les deux segments $p+x$, $p-x$ du diamètre $2p$. Ce facteur est donc égal à l'ordonnée rectangulaire répondant à l'abscisse x dans le cercle qui aurait son centre à l'origine et le diamètre $2p$.

Donc, pour une même abscisse, l'*ordonnée de l'ellipse rapportée à ses axes principaux est à celle du cercle décrit sur l'un de ses axes, comme diamètre, dans le rapport constant de l'autre axe à ce diamètre.* De là résulte un moyen de construire l'ellipse par points.

123. On conclut de cette propriété que *toute ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale ou oblique d'un cercle sur un plan, et tout cercle comme la projection de diverses ellipses ayant un axe commun;* considérations fécondes en conséquences intéressantes concernant les cordes supplémentaires, les diamètres conjugués, les parallélogrammes circonscrits.

Une ellipse, dont les diamètres principaux sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle dont le diamètre serait $2a$, et dont le plan ferait avec celui de l'ellipse un angle ayant pour cosinus le rapport $\frac{b}{a}$. Le centre O′ de l'ellipse (*fig.* 28) est la projection du centre O du cercle.

Imaginons dans le cercle un diamètre quelconque AB et les deux cordes AC et CB, formant l'angle droit ACB. Menons les diamètres FG et HI, qui passent par les milieux D, E de ces cordes. Chacun de ces diamètres partage en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre : ainsi FG passe au milieu de MN, parallèle à HI, et HI passe au mi-

lieu de NL, parallèle à FG. Enfin, les tangentes en F, G, H et I forment un carré PQRS.

Maintenant, considérons dans le plan de l'ellipse tous les points et les droites qui sont les projections des points et des droites dont nous venons de parler, et désignons-les par les mêmes lettres accentuées.

Les cordes $A'C'$ et $C'B'$, qui partent d'un même point C' de la courbe et aboutissent aux deux points A' et B', diamétralement opposés, s'appellent *cordes supplémentaires*. Elles jouissent de cette propriété que si par le centre O' on mène les droites $H'I'$ et $F'G'$ parallèles à ces cordes, chacune de ces droites partage en deux parties égales toute corde parallèle à l'autre. Par cette raison, on dit que $F'G'$ et $H'I'$ sont deux *diamètres conjugués*.

Enfin, au carré circonscrit PQRS répond en projection un parallélogramme $P'Q'R'S'$ circonscrit, dont les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués, et il est remarquable que tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse ont leur aire constante et égale à $4ab$. En effet, il est aisé de démontrer, comme on le verra au n° 349, que l'aire de la projection orthogonale d'une figure plane quelconque est égale à l'aire de cette figure dans l'espace multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans : donc l'aire $P'Q'R'S'$ est égale à l'aire PQRS multipliée par $\frac{b}{a}$; c'est donc $4a^2 \frac{b}{a}$ ou $4ab$.

124. On a vu, aux n°s 14 et 15, qu'en cherchant l'équation d'une courbe définie par une propriété géométrique, on peut reconnaître l'identité de la courbe avec une ligne connue par d'autres propriétés. En voici un autre exemple.

L'angle yOx étant droit (*fig.* 29), une droite AB, d'une longueur déterminée, est assujettie à se mouvoir, de manière que l'extrémité A soit toujours sur Oy, et l'extrémité B sur Ox. Cherchons l'équation de la courbe décrite par le

point M de la droite, dont la distance aux extrémités A, B, sont les constantes a, b.

On a

$$MP : MB :: AQ : AM$$

ou

$$y : b :: \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

ce qui revient à l'équation de l'*ellipse*.

125. Discussion de l'équation de l'hyperbole

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Pour $x = a$, on a $y = 0$; pour $x < a$, y est imaginaire; pour $x > a$ et quelconque, y a deux valeurs réelles de signes contraires; pour $x = 0$, on a $y = \pm b\sqrt{-1}$; c'est pourquoi cette quantité b s'appelle le demi-axe *imaginaire*. Ainsi la courbe a deux parties séparées, et chaque partie deux branches qui s'étendent indéfiniment.

L'équation, résolue par rapport à x, donnerait

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

et conduirait aux mêmes conclusions.

126. Lemme. m et n étant des quantités constantes positives ou négatives, la quantité $m\sqrt{x^2 + n}$ diffère aussi peu qu'on veut de mx, si l'on prend x suffisamment grand.

Soit

$$t = m\sqrt{x^2 + n},$$

d'où

$$t^2 - m^2x^2 = m^2n \quad \text{ou} \quad t - mx = \frac{m^2n}{t + mx}.$$

Ce dernier dénominateur augmente indéfiniment : donc la différence entre t et mx devient aussi petite qu'on veut.

127. Ce lemme s'applique à l'équation de l'hyperbole, et démontre qu'à mesure que l'abscisse de cette courbe croît, son ordonnée diffère aussi peu qu'on veut de l'ordonnée qui, ayant la même abscisse, appartient à l'une des droites exprimées par l'équation

$$Y = \pm \frac{b}{a} X.$$

Ces deux droites, dont les branches de la courbe s'approchent autant qu'on veut à mesure qu'on les prolonge, sans que les droites et la courbe puissent jamais se confondre, s'appellent *asymptotes* de l'hyperbole. Elles se construisent au moyen des deux demi-axes a, b. Toute droite parallèle à une asymptote ne rencontre la courbe qu'en un point, car il n'y a qu'un système de valeurs de x et de y qui satisfasse simultanément à deux équations telles que

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{a} x + \beta;$$

en effet, en élevant la deuxième au carré, et retranchant la première, on trouve

$$\frac{2b\beta}{a} x + \beta^2 + b^2 = 0,$$

d'où l'on tire une valeur unique de x.

Lorsque les demi-axes a et b de l'hyperbole sont égaux, l'équation est $y^2 - x^2 = -a^2$. Les asymptotes, exprimées par l'équation $y = \pm x$, font un angle droit, et l'hyperbole est dite *équilatère*.

Il est aisé de voir que toute hyperbole peut être considérée comme la projection orthogonale ou oblique d'une hyperbole équilatère.

128. Nous avons obtenu une équation simple du cercle (111) en plaçant l'origine sur la circonférence et en faisant

passer l'un des axes par le centre. Faisons la même chose pour l'ellipse et pour l'hyperbole, en prenant l'origine à une extrémité de l'un des axes principaux de l'ellipse et de l'axe transverse de l'hyperbole.

L'équation de l'ellipse peut s'écrire ainsi, quand l'origine est au centre O (*fig.* 30) :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x).$$

Or $(a+x)(a-x)$ est le produit $AP \times PA'$ des deux segments du diamètre AA', déterminés par l'ordonnée MP; il est évident que, si l'origine des coordonnées était en A, AP serait exprimé par x, et PA par $2a-x$. L'équation de l'ellipse serait donc

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

De même, l'équation de l'hyperbole, quand l'origine est au centre et l'axe des x suivant l'axe transverse, peut s'écrire ainsi :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x-a)(x+a);$$

$(x-a)(x+a)$ est le produit des deux distances AP, A'P (*fig.* 31), du pied de l'ordonnée aux deux sommets A et A'. Or, si l'origine était en A, les x positifs restant du même côté, AP serait exprimé par x et A'P par $2a+x$: l'équation de l'hyperbole serait donc

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole sont donc renfermées dans la formule

$$y^2 + mx^2 = 2px$$

qui exprime l'une ou l'autre suivant que m est positif ou négatif.

129. La parabole a été définie au n° 98.

Soient le *foyer* F (*fig.* 32) et la *directrice* AB; le rayon *vecteur* FM, ou ρ, est égal à la distance MN. Soit $AF = p$, quantité donnée qui spécifie la courbe. La droite indéfinie AFx s'appelle l'*axe principal* de la parabole. Soit $AO = OF \frac{p}{2}$; le milieu O de AF est le *sommet* de la parabole.

130. Cherchons l'équation de la parabole rapportée à son axe principal, le sommet étant pris pour origine des coordonnées.

$$\rho = MN = OP + AO = x + \frac{p}{2},$$

$$\rho^2 = MP^2 + FP^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2;$$

d'où, par l'élimination de ρ,

$$y^2 = 2px,$$

équation cherchée.

131. Si l'on change y en x, et x en y, l'équation

$$x^2 = 2py \quad \text{ou} \quad y = \frac{x^2}{2p}$$

est celle de la même parabole (si p a la même valeur), mais autrement située. Il en est de même des paraboles dont les équations sont

$$y^2 = -2px, \quad y = -\frac{x^2}{2p}.$$

132. En rapprochant l'équation de la parabole $y^2 = 2px$ de celle de la fin du n° 114, on voit que l'équation

$$y^2 + mx^2 = 2px$$

exprime l'une ou l'autre des trois courbes que nous venons

d'étudier, selon que le coefficient abstrait m est positif, négatif ou nul.

Quelle que soit la valeur de m, le coefficient linéaire $2p$ de x s'appelle le *paramètre* de la courbe. Si c'est une des deux courbes à centre, on a (128)

$$2p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a},$$

c'est-à-dire que le paramètre est une troisième proportionnelle à l'axe selon les abscisses et au second axe, tandis que m est égal à $\pm\frac{b^2}{a^2}$, et par conséquent à $\pm\frac{p}{a}$. L'équation précédente peut donc être écrite ainsi :

$$y^2 \pm \frac{p}{a}x^2 = 2px.$$

Cela posé, dans le cas où l'on ne voudrait considérer qu'une portion de la courbe, voisine du sommet situé à l'origine, il peut arriver que a soit tellement grand par rapport à p et à la plus grande valeur de x, que le terme $\frac{p}{a}x^2$ soit à négliger auprès de $2px$. Si, par exemple, on fait $a = 1000000^m$ et $p = 1$, d'où $b = \sqrt{pa} = 1000$, on aura

$$y^2 = 2x \pm 0,000001\, x^2.$$

Or, tant que x sera assez petit, par exemple inférieur à 1^m, le terme en x^2 pourra être négligé, et y^2 calculé d'après la formule

$$y^2 = 2x \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px,$$

comme si la courbe était une parabole. Telles sont les ellipses que les comètes décrivent autour du soleil comme foyer, tant qu'on n'en considère que les parties les plus rapprochées de cet astre.

C'est pourquoi l'on dit qu'une parabole est une ellipse

(et l'on peut dire aussi une hyperbole) dont les axes deviennent infinis, tandis que leur troisième proportionnelle $\frac{4b^2}{2a}$ ou $2p$ reste finie.

133. L'analogie des trois courbes résulte aussi de l'expression du rayon vecteur en fonction de l'abscisse dans l'ellipse et l'hyperbole. On a (117) et (118)

$$\rho = \frac{cx}{a} + a,$$

ellipse si $c < a$, hyperbole si $c > a$.

Cette équation peut s'écrire :

$$\rho = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right),$$

c'est-à-dire que le rayon vecteur est à l'abscisse, augmentée de la constante $\frac{a^2}{c}$, dans le rapport constant de c à a ; de sorte que, si l'on prend à partir du centre O (*fig.* 33), du côté des x négatifs, une distance OH (ou OH′) égale à $\frac{a^2}{c}$, et si l'on élève sur OH la perpendiculaire HK appelée *directrice*, le rayon vecteur FM, joignant le foyer à un point quelconque M de la courbe, sera à la distance MR (ou MR′), du point M à la directrice, dans un rapport constant, < 1 si la courbe est une ellipse, > 1 si c'est une hyperbole. De là une définition commune aux trois courbes étudiées dans ce paragraphe.

134. L'ellipse, l'hyperbole et la parabole, sont depuis longtemps connues sous la dénomination commune de *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant par des plans un cône à base circulaire. Cette propriété est comprise dans une proposition plus générale démontrée dans l'un des

paragraphes suivants. Nous ne considérerons ici que le cas où les plans coupants sont perpendiculaires au plan principal d'un cône oblique.

On appelle *plan principal* celui qui passe par le centre de la base circulaire du cône et par la perpendiculaire menée du sommet sur le plan de cette base. Les droites suivant lesquelles il coupe la surface conique sont les *génératrices principales*.

Soient SA, SB (*fig.* 34), ces deux droites, et prenons le plan principal ASB pour plan de projection orthogonale.

Soit AA′ la trace et la projection du plan coupant; c'est aussi la projection de la courbe d'intersection.

Faisons $AA' = 2a$.

Soient AB et A′B′ deux droites parallèles à la base circulaire du cône : ces droites sont les projections de deux cercles situés sur la surface conique et ayant AB et A′B′ pour diamètres.

Faisons $AB = 2r$, $A'B' = 2r'$.

Soit P le pied et la projection d'une ordonnée y quelconque de la courbe d'intersection. Prenons AA′ pour axe des abscisses ayant leur origine en A. Ainsi $AP = x$, $A'P = 2a - x$.

Menons par P la droite QQ′ parallèle à AB : elle est le diamètre d'un cercle dont y est également l'ordonnée projetée en P. Donc on a

$$y^2 = PQ \times PQ'.$$

Or, du parallélisme des droites AB, QQ′ et A′B′, résultent les relations

$$PQ = AB.\frac{A'P}{A'A} = 2r.\frac{2a-x}{2a},$$

$$PQ' = A'B'.\frac{AP}{AA'} = 2r'.\frac{x}{2a}:$$

donc, en substituant, on a

$$y^2 = \frac{rr'}{a^2}(2ax - x^2), \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

en faisant $rr' = b^2$. C'est l'équation d'une ellipse (128).

135. Supposons maintenant que le plan coupant PAA' rencontre les deux nappes du cône (*fig.* 35). On aura de même

$$y^2 = PQ \times PQ',$$

$$PQ = AB.\frac{A'P}{A'A} = 2r.\frac{2a + x}{2a},$$

$$PQ' = AB'.\frac{AP}{AA'} = 2r'.\frac{x}{2a};$$

d'où

$$y^2 = \frac{rr'}{a^2}(2ax + x^2),$$

ou

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

équation d'une hyperbole.

136. Tant que le plan coupant passant par A rencontre la seconde génératrice SB dans la même nappe où est le point A de la première, la section est une ellipse, courbe fermée; si la rencontre A' est dans l'autre nappe, la section est une hyperbole composée de deux parties séparées, qui s'étendent indéfiniment dans les deux nappes.

Il reste à considérer la position intermédiaire où le plan coupant AP est parallèle à la seconde génératrice principale (*fig.* 36).

Soit encore $AB = 2r$, et de plus $SB = 2l$.

y étant toujours l'ordonnée projetée en P, commune à la

courbe projetée en AP et au cercle projeté en QQ′, on a

$$y^2 = \mathrm{PQ} \times \mathrm{PQ}', \quad \mathrm{PQ} = \mathrm{AB} = 2r,$$
$$\mathrm{PQ}' = \mathrm{AB}.\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{SB}} = 2r.\frac{x}{2l},$$

d'où

$$y^2 = \frac{2r^2}{l}.x.$$

C'est l'équation d'une parabole.

On voit que c'est la courbe dont s'approche de plus en plus l'ellipse ou l'hyperbole d'intersection, à mesure que le point A′ s'éloigne du sommet du cône, tandis que le point A reste constant. L'équation de la parabole peut se tirer de celles des deux autres courbes d'après cette considération. Pour cela, écrivons ces équations sous la forme

$$y^2 = \frac{2rr'}{a}x \mp \frac{rr'}{a^2}x^2.$$

A mesure que A′ s'éloigne, le rapport $\frac{r'}{a}$ ou $\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AA'}}$ approche de la valeur $\frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{A'S}}$ ou $\frac{r}{l}$; ainsi le coefficient de x approche de la valeur finie $\frac{2r^2}{l}$, tandis que celui de x^2, différant aussi peu qu'on veut de $\frac{r^2}{l}\cdot\frac{1}{a}$, approche de zéro.

137. Parmi les sections elliptiques, un cas remarquable est celui où le plan coupant est *anti-parallèle* au plan de la base circulaire, c'est-à-dire que le plan coupant AA′ (*fig.* 37) fait avec une génératrice principale SA un angle SAA′ égal à l'angle SBA que l'autre génératrice SB fait avec la base circulaire AB.

Dans ce cas, les triangles semblables AA′B, AA′B′, don-

nent

$$AB : AA' :: AA' : A'B',$$

ou

$$2r : 2a :: 2a : 2r', \quad \text{ou} \quad rr' = a^2,$$

et l'équation de la section devient

$$y^2 = 2ax - x^2 :$$

cette section est donc un *cercle* (112).

Cette propriété trouve son application dans la construction des cartes géographiques.

§ V. PROPRIÉTÉS DES COURBES PARABOLIQUES ET HYPERBOLIQUES.

138. Lorsque dans une équation à deux variables x et y le premier membre est y seul, et le second membre ne renferme que des puissances entières et positives de x, combinées avec des constantes, on dit que y est une *fonction entière de* x. L'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots Hx^n,$$

dans laquelle tous les exposants de x sont entiers et positifs, est dans ce cas, et exprime une courbe dite *parabolique*.

A toute valeur positive ou négative de x répond une valeur de y. Si le second membre se réduit aux deux premiers termes, l'équation est celle d'une ligne droite.

Si l'équation est $y = A + Bx + Cx^2$, elle peut se mettre sous la forme

$$y = C\left(x^2 + \frac{B}{C}x + \frac{B^2}{4C^2}\right) + A - \frac{B^2}{4C},$$

ce qui revient à

$$y + \beta = C(x + \alpha)^2,$$

d'où, en transportant l'origine des coordonnées, de manière

qu'on ait

$$y+\beta=Y, \quad x+\alpha=X,$$

on conclut

$$Y=CX^2.$$

Ainsi, l'équation est réduite à la forme la plus simple par le déplacement des axes, transportés parallèlement à leur première direction; et le coefficient de X^2 est le même que celui de x^2 dans la première équation. Lorsque les axes sont rectangulaires, cette équation exprime une parabole dont l'axe principal est suivant l'axe des Y, et, par conséquent, parallèle à l'axe primitif des y.

Si les axes n'étaient pas rectangulaires, on transformerait l'équation en prenant OX (*fig.* 38), perpendiculaire à Oy, pour nouvel axe des abscisses, et conservant Oy pour axe coordonné. On a

$$\mathrm{Mp}=y=\mathrm{MP}-\mathrm{Pp}=Y-\frac{\mathrm{OP}}{\operatorname{tang}\alpha},$$

$$y=Y-\frac{X}{\operatorname{tang}\alpha},$$

$$\mathrm{Op}=x=\frac{\mathrm{OP}}{\sin\alpha}=\frac{X}{\sin\alpha}.$$

Ces valeurs de x et y, étant substituées dans l'équation générale des courbes paraboliques, donneront une équation de même forme. Donc l'équation $y=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2$ en coordonnées obliques est celle d'une parabole dont l'axe principal est parallèle à l'axe coordonné des y. Cette propriété est importante en mécanique.

139. Si l'on veut tracer la courbe

$$y=A+Bx+Cx^2,$$

il convient souvent de mener d'abord la droite dont l'équation est $y=A+Bx$, et de porter Cx^2 en accroissement

de l'ordonnée de cette droite, accroissement de même signe que C.

140. Trois points étant donnés, on peut y faire passer une parabole dont l'équation, par rapport à deux axes donnés, soit de la forme

$$y = A + Bx + Cx^2.$$

Désignant par x' et y', x'' et y'', x''' et y''', les coordonnés des points donnés, et les substituant dans l'équation générale, on a trois équations du premier degré pour déterminer les inconnues A, B, C.

On peut écrire immédiatement l'équation suivante :

$$y = y'\frac{(x-x'')(x-x''')}{(x'-x'')(x'-x''')} + y''\frac{(x-x')(x-x''')}{(x''-x')(x''-x''')} + y'''\frac{(x-x')(x-x'')}{(x'''-x')(x'''-x'')},$$

dont le second membre, du second degré en x, prend les valeurs y', y'', y''', quand on y fait successivement $x = x'$, $x = x''$, $x = x'''$.

141. La discussion de la courbe

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

se ramène à celle de

$$y = Dx^3$$

qui ne présente point de difficulté.

142. L'équation générale des courbes paraboliques

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^n$$

nous conduit naturellement à donner une idée du *calcul des différences finies*.

Soit une série de termes suivant une loi quelconque. Leurs différences s'appellent *différences premières*. Les différences de celles-ci s'appellent *différences secondes*. Les différences de ces dernières s'appellent *différences troisièmes*; et ainsi de suite.

	2	5	9	8	7	10
Différences premières.	3	4	—1	—1	3	
Différences secondes...		1	—5	0	4	
Différences troisièmes.		—6	5	4		

Pour appliquer ces définitions aux diverses valeurs d'un polynôme en x, qu'on peut toujours considérer comme exprimant l'ordonnée générale y d'une courbe dont x est l'abscisse, on suppose que x prenne des valeurs *équidifférentes*

$$x_0,\quad x_1 = x_0 + \delta,\quad x_2 = x_0 + 2\delta, \ldots,\ x_n = x_0 + n\delta,$$

auxquelles correspondent diverses valeurs de y, qui seront des ordonnées *équidistantes* de la courbe,

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Les différences *premières* de cette suite sont

$$y_1 - y_0,\quad y_2 - y_1,\quad y_3 - y_2,\quad y_4 - y_3, \ldots,\quad y_n - y_{n-1},$$

qu'on représente par les notations

$$\Delta y_0,\qquad \Delta y_1,\qquad \Delta y_2,\qquad \Delta y_3, \ldots,\qquad \Delta y_{n-1}.$$

Les différences *secondes* de la suite des y sont les différences premières de celle des Δ

$$\Delta y_1 - \Delta y_0,\quad \Delta y_2 - \Delta y_1,\quad \Delta y_3 - \Delta y_2, \ldots,$$

qu'on désignera par

$$\Delta^2 y_0,\quad \Delta^2 y_1,\quad \Delta^2 y_2, \ldots,$$

dont les différences, qui sont les différences *troisièmes* de la suite des y, sont désignées par

$$\Delta^3 y_0, \quad \Delta^3 y_1,$$

et ainsi de suite (*).

On remarquera que, y étant une fonction explicite de x, Δy_0 est une fonction de x_0 et de δ; que Δy_1, $\Delta y_2, \ldots$, n'en diffèrent qu'en ce que x_0 est remplacé par $x_1, x_2, \ldots$, ou $x_0 + \delta$, $x_0 + 2\delta, \ldots$; que $\Delta^2 y_0$ est de même une fonction de x_0 et δ, et que $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2, \ldots$, n'en diffèrent qu'en ce que x_0 est encore remplacé par $x_1, x_2, \ldots$, ou $x_0 + \delta$, $x_1 + 2\delta, \ldots$; et ainsi de suite pour les différences de tous les ordres.

Si on supprime les indices de y, on entend par Δy, $\Delta^2 y, \ldots$, des fonctions de x et de δ dans lesquelles il ne reste qu'à substituer au lieu de x les valeurs x_0, $x_0 + \delta$, $x_0 + 2\delta, \ldots$, pour avoir les suites ci-dessus indiquées.

143. La différence première d'un polynôme est évidemment égale à la somme des différences premières de tous les termes; et si l'un de ces termes est constant, il disparaît dans la différence première.

La différence première d'un monôme kx^m est

$$k(x+\delta)^m - kx^m = km\delta x^{m-1} + \frac{km(m-1)}{2}\delta^2 x^{m-2} \ldots,$$

c'est-à-dire un polynôme du degré $m - 1$ en x. Ce serait la constante $k\delta$ si m était $= 1$.

(*) Les chiffres 2, 3, ..., à la suite et en haut de Δ ne sont pas des exposants; $\Delta^2 y$ équivaut à $\Delta\Delta y$, c'est-à-dire qu'il est l'accroissement de l'accroissement de y, et si l'on voulait exprimer le carré de Δy, on écrirait $(\Delta y)^2$, ou plus simplement Δy^2. Quand on considère y^2 comme fonction d'une variable x, son accroissement résultant de ce que x devient $x + \Delta x$ est désigné par $\Delta . y^2$.

Donc, *si y est un polynôme entier en x, Δy en est un autre, aussi entier, et du degré immédiatement inférieur à celui de y.*

144. $\Delta^2 y$, n'étant autre que la différence première de Δy, est un polynôme dans lequel le plus grand exposant de x sera d'une unité moindre que dans Δy, et, par conséquent, de deux unités moindre que dans y.

En général, $\Delta^n y$ est un polynôme en x dont le degré a n unités de moins que le degré de y; et, par conséquent, dans le cas où n est le degré du polynôme y en x, $\Delta^n y$ est une constante, dépendant seulement des constantes du polynôme y et de la différence δ des valeurs consécutives de x. Dans ce même cas, $\Delta^{n+1} y$ est nul. *Exemple :*

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 4x.$$

Si l'on veut avoir les valeurs de y correspondantes aux valeurs de x qui diffèrent entre elles de 0,01, on peut disposer ainsi les calculs en commencant par les valeurs de x les plus simples, et en supprimant la virgule dans les différences :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−0,01	−0,040502			
		+40502		
0,00	0,000000		−1000	
		39502		12
+0,01	+0,039502		− 988	
		38514		12
0,02	0,078016		− 976	
		37538		12
0,03	0,115554		− 964	
		36575		etc.
0,04	0,152128		etc.	
		etc.		
etc.	etc.			

On voit qu'il suffit de calculer d'après la formule

$$2x^3 - 5x^2 + 4x$$

quatre termes consécutifs de y, et qu'on obtient ensuite les autres par des additions ou soustractions, ce qui est incomparablement plus rapide que de calculer directement les valeurs de y, quand la variable x acquiert plusieurs chiffres significatifs.

On emploie cette méthode pour dresser, d'après des formules données, des tables servant à abréger les calculs de la mécanique, de l'hydraulique, des déblais et remblais, etc.

145. Lorsque, après avoir déterminé un certain nombre d'ordonnées *équidistantes* d'une courbe, on trouve que leurs différences secondes sont constantes, on en conclut que la courbe peut être une parabole, et son équation de la forme $y = A + Bx + Cx^2$. On a vu que trois points connus d'une telle courbe suffisent pour déterminer les coefficients A, B, C, et, par conséquent, pour calculer tant de points qu'on voudra de la courbe : mais quand les ordonnées des trois points connus M′, M″, M‴ (*fig.* 39) sont équidistantes, le calcul se simplifie.

On peut transporter l'origine des coordonnées au point intermédiaire M″. Soit δ l'intervalle M″P‴ égal à P′M″.

Soit l'ordonnée de $M' = -h_1$ et celle de $M''' = h_2$, l'équation cherchée sera de la forme

$$y = B\frac{x}{\delta} + C\frac{x^2}{\delta^2}$$

et devra être satisfaite par les deux systèmes de valeurs

$$\frac{x}{\delta} = -1 \text{ et } y = -h_1, \quad \frac{x}{\delta} = 1 \text{ et } y = h_2.$$

On a donc

$$-h_1 = -B + C \quad \text{et} \quad h_2 = B + C,$$

d'où

$$B = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2}(h_2 - h_1).$$

L'équation devient ainsi

$$y = \frac{1}{2}(h_2 + h_1)\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)\frac{x^2}{\delta^2},$$

ou bien

$$y = h_2\frac{x}{\delta} - \frac{1}{2}(h_2 - h_1)\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\frac{x}{\delta}.$$

Si pour calculer l'ordonnée MP d'un point intermédiaire M on ne prenait que $y = h_2\frac{x}{\delta}$ premier terme de cette dernière formule, ce serait supposer que les points M″, M, M‴, sont en ligne droite; et si M″P était $\frac{1}{2}$ M″P‴, ce qui fait $\frac{x}{\delta} = \frac{1}{2}$, l'erreur commise serait $\frac{1}{8}(h_2 - h_2)$.

146. Application au calcul des logarithmes des sinus et tangentes des petits angles :

	Δ	Δ²
log sin 4° 16′ = $\bar{2}$,8715646		
	16900	
log sin 4° 17′ = $\bar{2}$,8732546		—65
	16835	
log sin 4° 18′ = $\bar{2}$,8749381		—66
	16769	
log sin 4° 19′ = $\bar{2}$,8766150		—65
	16704	
log sin 4° 20′ = $\bar{2}$,8782854		

On demande log sin 4° 17′ 21″.

Si l'on prenait les angles pour abscisses et les logarithmes sinus pour ordonnées, on aurait une courbe qui différerait très-peu d'une parabole, puisque la différence seconde des ordonnées équidistantes est presque constante. La question se réduit à trouver l'ordonnée intermédiaire répondant à l'abscisse 4° 17′ 21″.

On applique la formule précédente en transportant l'origine au point correspondant à $4^\circ 17'$; prenant l'unité du dernier ordre décimal des logarithmes pour unité des ordonnées, on aura

$$h_1 = 16900, \quad h_2 = 16835, \quad h_2 - h_1 = -65,$$

$$\frac{x}{\delta} = \frac{21}{60}, \quad 1 - \frac{x}{\delta} = \frac{39}{60}, \quad \frac{1}{2}\frac{x}{\delta}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right) = 0,114;$$

y devient donc

$$16835 \cdot \frac{21}{60} + 65 \cdot 0,114 = 5892,2 + 7,4 = 5900.$$

C'est ce qu'il faut ajouter à

$$\log \sin 4^\circ 17' = \ldots 2,8732546$$

pour avoir

$$\log \sin 4^\circ 17' 21'' = 2,8738446.$$

147. Lorsqu'on a les coordonnées de trois points d'une courbe, et que la question qui donne lieu à cette courbe permet de la considérer comme peu différente d'une parabole, au moins dans l'intervalle des points obtenus, on calcule approximativement des ordonnées intermédiaires par la formule du n° **145**, ou par celle du n° **140**, suivant que les ordonnées connues sont ou ne sont pas équidistantes. Cette opération, appelée *interpolation*, est fort utile dans les sciences d'observation.

Exemple. La vapeur d'eau à l'état de saturation supporte une pression qui varie suivant la température.

Sachant qu'aux pressions de

5   7   10   atmosphères

répondent respectivement les températures

153,28   166,50   181,60   degrés,

on demande les températures pour les pressions de 6, 8, 9 atmosphères.

Faisant y et x égaux aux accroissements à partir de 166°,50 et 7 atmosphères, on a l'équation

$$y = Ax + Bx^2,$$

satisfaite par les deux systèmes

$$x = -2, \quad y = -13{,}42,$$
$$x = 3, \quad y = 15{,}10;$$

ce qui donne deux équations du premier degré, d'où l'on tire

$$A = 6{,}039 \quad \text{et} \quad B = -0{,}335;$$

donc

$$y = 6{,}039\,x - 0{,}335\,x^2.$$

Faisant successivement $x = -1, +1, +2$, et ajoutant les résultats à 166,50, on trouve les températures cherchées :

$$160°{,}13, \quad 172°{,}20, \quad 177°{,}24.$$

L'expérience directe a donné

$$160°{,}2, \quad 172°{,}1, \quad 177°{,}1.$$

148. Nous venons de voir que y étant un polynôme entier en x, Δy en est un autre dont il est facile de calculer tous les termes, lorsque les coefficients de x dans y sont connus. Quant au terme constant de y, il disparaît dans la différence qui, par conséquent, reste la même quel que soit ce terme.

Réciproquement, si l'on se donne Δy sous la forme d'un polynôme entier en x, et si l'on se donne en outre la valeur de l'accroissement δ de x, on pourra toujours retrouver y, sauf le terme indépendant de x qui restera arbitraire.

Soit, par exemple,

$$\Delta y = ax^2 + bx + c.$$

Puisque nous savons que y est du troisième degré, posons

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

En mettant $x + \delta$ au lieu de x dans ce polynôme, on a une expression de $y + \Delta y$; on en conclut par soustraction celle de

$$\begin{aligned} \Delta y = 3Ax^2\delta + 3Ax\delta^2 &+ A\delta^3 \\ + 2Bx\delta &+ B\delta^2 \\ &+ C\delta, \end{aligned}$$

et pour que cette dernière soit identique à celle que nous avons supposée donnée, il faut et il suffit que l'on ait, en égalant les coefficients des diverses puissances de x,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3A\delta &= a, \\ 3A\delta^2 + 2B\delta &= b, \\ A\delta^3 + B\delta^2 + C\delta &= c, \end{aligned} \right.$$

équations du premier degré, d'où l'on tirera toujours les valeurs de A, B et C, la constante D restant arbitraire.

149. Voici un emploi utile de ces considérations. Reprenons, avec les significations indiquées au n° **142**, les deux suites

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \ldots y_{n-1} & y_n \\ \Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 \ldots\ldots\ldots \Delta y_{n-1}. \end{array}$$

Un terme quelconque de la première dépend de l'un de ceux qui précèdent et des différences intermédiaires, suivant la loi très-simple indiquée par la formule

$$(2) \qquad y_n - y_0 = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{n-1}.$$

Il suffira donc de savoir calculer la différence $y_n - y_0$ pour obtenir la somme des n termes du second membre.

Si Δy est une fonction connue du second degré en x, et qu'on se donne en outre la valeur de δ, on calculera, au moyen des équations (1), les coefficients A, B et C, et, par conséquent, la différence

$$y_n - y_0 = A(x_n^3 - x_0^3) + B(x_n^2 - x_0^2) + C(x_n - x_0).$$

Exemple. Soient $\Delta y = (px+1)^2$, $\delta = 1$ et $x_0 = 0$, par conséquent $x_n = n$. Le second membre de la formule (2) devient, dans ce cas,

$$(3) \quad 1^2 + (p+1)^2 + (2p+1)^2 + \ldots + [(n-1)p+1]^2;$$

c'est la somme des quarrés des n termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 1 et dont la raison est p.

Or, puisqu'on a en général

$$\Delta y = (px+1)^2 = p^2x^2 + 2px + 1,$$

fonction du second degré comprise dans la formule

$$\Delta y = ax^2 + bx + c,$$

on trouvera l'expression correspondante et générale de y en faisant, dans les équations (1),

$$a = p^2, \quad b = 2p, \quad c = 1 \quad \text{et} \quad \delta = 1.$$

Les équations (1) donnent en effet

$$A = \frac{1}{3}p^2, \quad B = \frac{p(2-p)}{2}, \quad C = \frac{6-6p+p^2}{6};$$

ainsi

$$y = \frac{1}{6}[2p^2x^3 + 3p(2-p)x^2 + (6-6p+p^2)x] + D,$$

et, par conséquent,

$$y_n - y_0 = \frac{n}{6}\left[2p^2n^2 + 3p(2-p)n + 6 - 6p + p^2\right];$$

c'est la valeur cherchée de la suite (3).

Cas particuliers. 1°. $p = 1$. La suite (3) est alors la somme des quarrés des nombres consécutifs depuis 1 jusqu'à n, et l'on a cette somme

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-1).$$

2°. $p = 2$. La suite (3) devient la somme des quarrés des nombres impairs consécutifs depuis 1 jusqu'à $2n-1$, et l'on trouve sa valeur $y_n - y_0$,

$$1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1),$$

ou, en faisant $2n - 1 = l$,

$$1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + l^2 = \frac{1}{6}l(l+1)(l+2).$$

Ces dernières formules ont leur application dans les calculs relatifs aux *ponts suspendus*.

150. L'équation $y = \frac{a}{x^m}$ lorsque m est entier appartient à des courbes dites *hyperboliques*.

Soient d'abord $m = 1$ et $y = \frac{l^2}{x}$. La courbe s'étend infiniment dans l'angle yOx et dans son opposé au sommet; sa construction graphique (*fig.* 40) annonce une hyperbole dont Ox et Oy sont les asymptotes. C'est ce qu'il faut vérifier en prenant pour axes rectangulaires les droites OX et OY, dont l'une divise l'angle yOx en deux parties égales, désignées chacune par α. On a, en désignant par X et Y les nouvelles coordonnées du point quelconque M,

$$X = x\cos(xX) + y\cos(yX) = x\cos\alpha + y\cos\alpha;$$

d'où

$$x+y=\frac{X}{\cos\alpha}.$$

$$Y=x\cos(\mathrm{xY})+y\cos(\mathrm{yY})=-x\sin\alpha+y\sin\alpha;$$

d'où

$$y-x+=\frac{Y}{\sin\alpha}.$$

On pourrait chercher x et y pour les substituer dans $xy=l^2$; mais on n'a besoin que du produit xy; les équations ci-dessus donnent

$$x^2+2xy+y^2=\frac{X^2}{\cos^2\alpha},\quad x^2-2xy+y^2=\frac{Y^2}{\sin^2\alpha},$$

d'où

$$4xy=\frac{X^2}{\cos^2\alpha}-\frac{Y^2}{\sin^2\alpha};$$

l'équation $xy=l^2$ se transforme donc en

$$\frac{X^2}{4l^2\cos^2\alpha}-\frac{Y^2}{4l^2\sin^2\alpha}=1;$$

ce qui exprime une hyperbole, dont l'axe transverse est $4l\cos\alpha=2\mathrm{OA}$.

Si les axes Ox, Oy sont rectangulaires, on a

$$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

et l'équation en X, Y, devenant $X^2-Y^2=2l^2$, exprime une hyperbole équilatère.

L'équation $xy+ax+by=c$, pouvant s'écrire ainsi

$$(y+a)(x+b)=c+ab,$$

se ramènerait évidemment, en transportant les axes parallèlement, à la forme $XY=d$. Elle exprime donc une

hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés.

151. L'équation de l'hyperbole, sous la forme $xy=$const., conduit à des propriétés remarquables de cette courbe.

Soit UV (*fig.* 40) une sécante comprise entre les deux asymptotes Ox, Oy, et divisée aux points M et M' de la courbe en trois segments : $UM = u$, $M'V = v$ et $MM' = s$. Menons BC parallèle à UV et pouvant ne pas rencontrer la courbe. Les triangles semblables OBC, QUM et PMV donnent

$$u = x\frac{BC}{OC} \quad \text{et} \quad s + v = y\frac{BC}{OB},$$

d'où, à cause de $xy = k^2$,

$$u(s+v) = k^2\frac{BC^2}{OB.OC}.$$

On trouverait de même par les triangles OBC, Q'UM' et P'M'V,

$$v = y'\frac{BC}{OB} \quad \text{et} \quad u + s = x'\frac{BC}{OC},$$

d'où

$$v(s+u) = k^2\frac{BC^2}{OB.OC}.$$

Donc 1°. *Pour toutes les sécantes parallèles entre elles, le produit* $u(s+v)$ ou $v(s+u)$ *d'un des segments extrêmes par la somme des deux autres est constant.*

2°. *Sur une même sécante les deux segments extrêmes* u *et* v *sont égaux*, ce qui résulte de l'égalité des produits $u(s+v)$ et $v(s+u)$.

Cette dernière propriété, ayant lieu quelle que soit la direction de la sécante et même, comme il est facile de le voir, dans le cas où la sécante coupe les deux branches de la courbe, fournit un moyen très-simple de construire une hyperbole dont on a les asymptotes et un point.

152. Aperçu (*fig.* 41) de la forme de la courbe exprimée par l'équation

$$y = \frac{a^3}{x^2}.$$

Pour $x = \pm a$ on a $y = a$; pour $x = \pm ma$, $y = \frac{a}{m^2}$, tandis que pour $y = ma$, $x = \frac{\pm a}{\sqrt{m}}$.

La courbe se rapproche beaucoup plus rapidement de l'axe des x que de l'axe des y, quoique ces axes soient asymptotes l'un et l'autre.

§ VI. DE QUELQUES COURBES TRANSCENDANTES.

153. La courbe appelée *logarithmique* est exprimée sous la forme la plus simple par l'équation

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}.$$

La longueur a détermine l'échelle de la construction. L'axe des y est asymptote du côté des y négatifs (*fig.* 42).

Pour

$$\frac{x}{a} = \infty \ldots 1000 \quad 100 \quad 10 \quad 1 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \ldots . 0.$$

on a

$$\frac{y}{a} = \infty \ldots \ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \ -\infty .$$

L'équation $\frac{Y}{b} = \log \frac{X}{b}$ est celle d'une courbe semblable à la première et semblablement placée par rapport aux axes. Car, si l'on fait

$$\frac{X}{b} = \frac{x}{a} \quad \text{ou} \quad X = \frac{b}{a} x,$$

on aura

$$\frac{Y}{b}=\frac{y}{a} \quad \text{ou} \quad Y=\frac{b}{a}y.$$

154. L'équation $\frac{y}{a}=m\log\frac{x}{a}$ est encore celle d'une courbe semblable à la précédente, mais non semblablement placée par rapport à l'axe des x, car elle donne

$$\frac{y}{ma}=\log\left(\frac{y}{ma}\cdot m\right)=\log\frac{x}{ma}+\log m,$$

d'où

$$\frac{y-a\,m\log m}{ma}=\log\frac{x}{ma};$$

donc, en élevant l'origine de la longueur $am\log m$ sur l'axe des y, et appelant les nouvelles coordonnées Y, X, on a

$$\frac{Y}{ma}=\log\frac{X}{ma},$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

155. La courbe dont l'équation est $\frac{y}{a}=m^{\frac{x}{a}}$ est également une logarithmique; mais elle a pour asymptote l'axe des x négatifs (*fig.* 43). Car on a

$$\log\frac{y}{a}=\frac{x}{a}\log m;$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\log m}\log\frac{y}{a}.$$

156. *Sinusoïde.* Si sur Ox (*fig.* 44) on porte les abscisses OP, OP′, OP″,..., égales aux arcs de cercle Am, Am′, Am″, et qu'on fasse les ordonnées PM, P′M′, P″M″,..., de même longueur et de même sens que pm, p′m′, p″m″,...,

la courbe OMM′M″... aura pour équation

$$y = r \sin\left(\frac{x}{r}\right),$$

le rayon du cercle générateur étant r; et alors l'angle $\frac{x}{r}$ n'est pas exprimé numériquement en degrés sexagésimaux, mais par le rapport de l'arc compris entre ses côtés au rayon avec lequel il est décrit.

La forme générale de la courbe est facile à discuter.

157. *Cycloïde.* Si un cercle roule sans glisser sur une droite, en restant dans un même plan, la courbe que décrit un point de sa circonférence s'appelle une *cycloïde* (*fig.* 45).

Soit AmB le cercle générateur dans sa position initiale. Soit LMK une autre position quelconque. Supposons que le point décrivant soit en A sur le premier cercle et en M sur le second. Par la définition, on a

$$\text{arc}\,\text{LM} = \text{AL}.$$

Or, si Mm est parallèle à AL, on a

$$\text{Am} = \text{LM}, \quad \text{mM} = \text{AL};$$

donc

$$\text{mM} = \text{arc}\,\text{Am}.$$

De même

$$\text{m}'\text{M}' = \text{arc}\,\text{Am}'; \text{ etc.}$$

En général, on a $y = x$ pour une équation de la courbe, en appelant x *l'abscisse curviligne* Am, portée à partir du point A sur la circonférence AmB, et y l'ordonnée mM parallèle à l'axe AE. Si entre ces mêmes variables l'équation était $y = ax$, la cycloïde serait *allongée* ou *raccourcie* selon que la constante a serait $>$ ou $<$ 1.

158. *Spirale d'Archimède.* Une droite OM (*fig.* 46)

tourne dans un plan autour d'un de ses points O; le point M est mobile sur la droite, et y parcourt des longueurs égales pendant que la droite OM décrit des angles égaux. Le point M décrit sur le plan la *spirale d'Archimède*.

Soit Oa la position de la droite quand le point décrivant est en O; amm′ est un cercle quelconque, ayant O pour centre. Les longueurs OM, OM′, du rayon vecteur sont proportionnelles aux angles aOM, aOM′, ou aux arcs am, am′. De là une construction facile de la courbe quand on connaît la longueur ON parcourue par le point décrivant pendant une révolution entière de la droite mobile.

Cherchons à exprimer cette courbe par une équation.

159. Soit $ON = l$, donnée; le rayon vecteur $OM = \rho$, variable. Soit $\frac{\text{arc am}}{\text{Oa}} = \theta$; ce rapport θ de l'arc variable am à son rayon est l'expression analytique de l'angle aOm. D'après la définition de la courbe, on a $\rho : l :: \theta : 2\pi$ ou $2\pi\rho = l\theta$, équation cherchée dans laquelle les variables ρ et θ sont les coordonnées *polaires* de la courbe.

170. La courbe dite *développante* du cercle, utile en mécanique, est étudiée dans le Cours de Géométrie descriptive.

§ VII. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES, APPLIQUÉE AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

161. Les équations des courbes dont nous venons de nous occuper ont été obtenues sous des formes simples, par suite du choix convenable de la position des axes coordonnés. De même que l'équation du cercle (95 et 96) est plus compliquée lorsque le centre a une situation quelconque que lorsqu'il est à l'origine des coordonnées, de même il est évident que les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de

la parabole, seraient moins simples si les axes étaient pris arbitrairement et faisaient un angle quelconque. Mais il est important de constater :

1°. Que dans tous les cas les équations de ces trois courbes exprimées en coordonnées parallèles à des axes sont du second degré, c'est-à-dire toujours comprises dans la formule générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$

2°. Et que réciproquement une équation du second degré en coordonnées parallèles à des axes ne peut exprimer une autre courbe que l'ellipse (dont le cercle est un cas particulier), l'hyperbole ou la parabole.

La démonstration de cette double proposition dépend d'une méthode générale qu'on appelle la *transformation des coordonnées*.

162. Soient Ox, Oy (*fig.* 47), les axes donnés quelconques auxquels est rapportée une courbe dont l'équation est $F(x, y) = 0$;

Soient $O'x'$, $O'y'$, les axes également donnés relativement auxquels on se propose d'obtenir l'équation de la même courbe;

Soient a et b les coordonnées OA, AO', de l'origine O' relativement aux premiers axes.

M étant un point quelconque de la courbe, ses coordonnées x et y sont OP et PM, tandis que ses coordonnées x' et y' sont O'P' et P'M'. Il est aisé d'exprimer par des équations les relations qui existent entre les quatre variables x, y, x', y', les constantes a, b, et les angles des axes entre eux. Il suffit de remarquer que la ligne brisée OPM, composée de x et de y, et la ligne brisée OAO'P'M, composée de a, b, x' et y', sont deux contours polygonaux conduisant du point O au point M, et que par conséquent leurs

projections sur une même droite sont égales (22). Nous bornant ici à considérer les projections rectangulaires, nous pouvons appliquer le théorème du n° 46; et afin d'obtenir séparément les expressions de x et de y en fonctions des quantités x', y', a, b, et des angles, nous prenons successivement pour axes de projection, d'abord la droite OX perpendiculaire à Oy, puis la droite OY perpendiculaire à Ox. La formule ci-dessus devient, dans ces deux cas (en remarquant que les cosinus des angles d'une droite avec OX et avec OY sont les sinus des angles de la même droite avec Oy et avec Ox),

$$x \sin(\mathrm{x},\mathrm{y}) = a \sin(\mathrm{x},\mathrm{y}) + x' \sin(\mathrm{x}',\mathrm{y}) + y' \sin(\mathrm{y}',\mathrm{y}),$$
$$y \sin(\mathrm{y},\mathrm{x}) = b \sin(\mathrm{y},\mathrm{x}) + x' \sin(\mathrm{x}',\mathrm{x}) + y' \sin(\mathrm{y}',\mathrm{x}),$$

d'où

$$x = a + \frac{x' \sin(\mathrm{x}',\mathrm{y}) + y' \sin(\mathrm{y}',\mathrm{y})}{\sin(\mathrm{y},\mathrm{x})},$$
$$y = b + \frac{x' \sin(\mathrm{x}',\mathrm{x}) + y' \sin(\mathrm{y}',\mathrm{x})}{\sin(\mathrm{y},\mathrm{x})}.$$

163. Les coordonnées x, y, x', y', d'un même point de la courbe considérée, satisfont simultanément à l'équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$ et aux deux formules finales du numéro précédent; donc si l'on substitue à x et à y dans l'équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$ leurs expressions données par ces formules, on aura une nouvelle équation qui sera également satisfaite, et qui, ne renfermant plus d'autre variable que x' et y', sera l'équation de la même courbe rapportée aux axes Ox', Oy'.

164. Si l'équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$ est une équation *algébrique* du $m^{ième}$ degré, c'est-à-dire qui puisse se ramener à la forme

$$Ay^m + (Bx + C)y^{m-1} + (Dx^2 + Ex + F)y^{m-2} + \ldots = 0,$$

la plus grande somme des exposants de x et de y dans un

même terme étant le nombre entier m, l'équation transformée en nouvelles coordonnées x', y', ne sera pas d'un degré supérieur au $m^{ième}$, puisque les valeurs de x et de y à substituer dans la première équation sont du premier degré. L'équation transformée ne sera pas non plus d'un degré inférieur au $m^{ième}$, car il faudrait, pour que cela fût possible, que le degré pût s'élever quand on reviendrait des nouveaux axes aux anciens.

Ainsi, à quelques axes coordonnés qu'on les rapporte, les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, sont toujours du second degré.

165. Pour établir la réciproque de cette proposition, nous prendrons l'équation la plus générale du second degré à deux variables :

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et nous supposerons que les coordonnées x et y sont rectangulaires, en remarquant que, s'il en était autrement, on pourrait, par la transformation, obtenir pour la même courbe rapportée à des axes rectangulaires une équation différente, mais toujours du second degré.

Nous remarquerons, en second lieu, que si le terme Bxy n'existait pas dans l'équation, une transformation pareille à celle du n° **112** réduirait facilement l'équation à trois termes. Proposons-nous donc de faire disparaître de l'équation le produit xy en changeant la direction des axes, mais en les conservant toujours rectangulaires et sans changer l'origine des coordonnées.

Dans ce cas particulier, les formules finales du n° **162** se simplifient : on a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \sin(y, x) = 1, \quad \sin(x', y) = \cos(x', x),$$
$$\sin(y', y) = -\sin(x', x),$$
$$\sin(y', x) = \cos(x', x);$$

et si, pour abréger, on remplace l'angle (x', x) par α, les formules de transformation deviennent (telles qu'on aurait pu les obtenir directement par la théorie des projections)

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Mettant ces expressions de x et de y dans l'équation (1), on obtiendra une transformée du second degré, de la forme

$$(2) \quad A'y'^2 + B'x'y' + C'x'^2 + D'y' + E'x' + F = 0;$$

dans laquelle les coefficients A', B',..., renfermeront l'angle α. Il s'agit de choisir cet angle de manière que B' soit nul. Or, en réunissant les termes en $x'y'$ qui proviendront de la substitution, on trouve

$$B' = 2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

ou (56)

$$B' = (A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha.$$

Cette quantité serait nulle indépendamment de α si l'on avait à la fois $A = C$ et $B = 0$, auquel cas il est aisé de voir (**112**) que l'équation (1) en coordonnées rectangulaires serait celle d'un cercle.

Dans tout autre cas, il faudra, pour faire disparaître le produit $x'y'$, satisfaire à l'équation

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0,$$

d'où, en divisant par $(A - C)\cos 2\alpha$,

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{C - A}.$$

Comme la tangente d'un angle qui passe de zéro à 180° prend toutes les valeurs entre $+\infty$ et $-\infty$, il s'ensuit qu'on trouvera toujours un angle α, mais *un seulement*, plus petit que 90°, satisfaisant à la condition proposée. Il y a donc toujours un système d'axes rectangulaires (et il n'y

en a qu'un, sauf le cas du cercle) pour lequel l'équation d'une courbe du second degré se réduit à la forme

$$A'y'^2 + C'x'^2 + D'y' + E'x' + F = 0.$$

166. Il reste à compléter la transformation de cette équation pour la réduire à trois termes. Il faut pour cela distinguer le cas où aucun des coefficients A', C' n'est nul, et celui où l'un des deux disparaît. Ils ne peuvent être nuls tous deux, puisque l'équation doit rester du second degré.

Dans le premier cas, l'équation peut s'écrire ainsi :

$$A'\left(y' + \frac{D'}{2A'}\right)^2 + C'\left(x' + \frac{E'}{2C'}\right)^2 + F - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2} = 0.$$

Cela posé, il est toujours possible de transporter les axes *parallèlement à eux-mêmes* en O″x″, O″y″, de manière que, x'' et y'' étant les coordonnées d'un point de la courbe dans ce second système d'axes rectangulaires, on ait

$$x' + \frac{E'}{2C'} = x'' \quad \text{et} \quad y' + \frac{D'}{2A'} = y'';$$

car il suffit et il faut pour cela que les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux axes Ox′, Oy′, soient, l'abscisse $\frac{-E'}{2C'}$, et l'ordonnée $\frac{-D'}{2A'}$.

En faisant, pour abréger,

$$F - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2} = F',$$

l'équation de la courbe se réduit définitivement à

$$A'y''^2 + C'x''^2 + F' = 0.$$

Faisons maintenant toutes les hypothèses possibles sur les valeurs des constantes A', C', F'.

1°. Si elles étaient toutes trois de même signe, l'équation serait impossible à réaliser.

2°. Si F' était nul, et A' de même signe que C', l'équation ne serait satisfaite que par $x = 0$, $y = 0$, elle exprimerait un seul point, devenu l'origine par la dernière transformation.

3°. Si, F' étant nul, A' et B' étaient de signes contraires, l'équation, réduite à la forme

$$y^2 = K^2 x^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm Kx,$$

exprimerait deux droites passant par l'origine, et situées symétriquement par rapport aux derniers axes.

4°. Si A' et C' ont un même signe, contraire à celui de F', l'équation, réduite à la forme

$$\frac{y^2}{q^2} + \frac{x^2}{p^2} = 1,$$

est celle d'une ellipse rapportée à ses diamètres principaux (107).

5°. Enfin, si A' et C' sont de signes contraires, quel que soit celui de F', l'équation, se réduisant à l'une des formes

$$\frac{y^2}{q^2} - \frac{x^2}{p^2} = \pm 1,$$

est celle d'une hyperbole rapportée à ses diamètres principaux (107).

167. Le dernier cas à considérer est celui où, dans l'équation finale du n° 165, l'un des coefficients A', C', est nul. Soit $C' = 0$.

Si l'on avait en même temps $E' = 0$, l'équation, réduite à $A'y'^2 + D'y' + F' = 0$, exprimerait deux droites parallèles à l'axe des x'. Dans toute autre hypothèse, l'équation peut s'écrire ainsi :

$$A'\left(y' + \frac{D'}{2A'}\right)^2 + E'\left(x' + \frac{F'}{E'} - \frac{D'^2}{4A'E'}\right) = 0.$$

Or, en transportant les axes parallèlement, de manière qu'on ait

$$y' + \frac{D'}{2A'} = y'', \quad x' + \frac{F'}{E'} - \frac{D'^2}{4A'E'} = x'',$$

on ramène l'équation à la forme

$$A'y''^2 + E'x'' = 0,$$

qui appartient exclusivement à la parabole.

168. Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée au n° 161. C'est donc à juste titre que, vu l'emploi presque exclusif des coordonnées parallèles à des axes, les courbes étudiées au § IV (n°s 116 et suiv.), d'après leurs propriétés *focales*, s'appellent *courbes du second degré.*

Des diamètres des courbes du second degré.

169. Une équation du second degré peut être utilement discutée d'une autre manière que par la transformation immédiate des coordonnées, pour reconnaître le genre de courbe qu'elle exprime. Reprenons cette équation sous la forme la plus générale, l'angle des axes coordonnés étant quelconque,

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et supposons que le coefficient A de y^2 ne soit pas nul; c'est ce qui aura lieu lorsque l'axe des y aura été choisi de manière qu'une parallèle à cet axe rencontre la courbe en deux points, et par conséquent ne puisse pas être une asymptote. L'équation résolue par rapport à y donne

$$(2) \left\{ \begin{aligned} y &= -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A} \\ &\pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE) + D^2 - 4AF}, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut d'abord que la droite dont l'équation est

$$(3) \qquad y = -\frac{B}{2A}x - \frac{D}{2A},$$

coupe en leurs milieux, et sous un angle qui généralement n'est pas droit, toutes les cordes parallèles à l'axe des y.

Cette droite est un *diamètre* de la courbe, et la discussion de cette courbe se ramène à celle du radical de l'équation (2).

Si l'on a $B^2 - 4AC > 0$, la courbe s'étend à l'infini du côté des x positifs et du côté des x négatifs. C'est donc une hyperbole, sauf le cas particulier de deux lignes droites, quand le trinôme en x sous le radical est le carré d'un binôme.

Si l'on a $B^2 - 4AC < 0$, le trinôme sous le radical devient négatif dès que x, soit positif, soit négatif, est suffisamment grand en valeur absolue; la courbe est donc limitée dans tous les sens, et c'est une ellipse, sauf le cas d'impossibilité, quand le trinôme sous le radical reste négatif pour toute valeur de x, et le cas d'un point unique quand le trinôme changé de signe est le carré d'un binôme.

Enfin si l'on a $B^2 - 4AC = 0$, selon que $BD - 2AE$ est positif ou négatif, le radical reste réel pour des valeurs croissant indéfiniment dans un seul sens; la courbe est illimitée de ce côté seulement; c'est donc une parabole, sauf le cas de deux droites parallèles au diamètre déterminé par l'équation (3).

Dans les deux cas où $B^2 - 4AC$ n'est pas nul, la courbe a un centre placé sur le diamètre exprimé par l'équation (3). Si l'on y transporte l'origine des coordonnées en prenant l'axe des x suivant ce même diamètre, et l'axe des y parallèle à sa première direction, la nouvelle équation de la même courbe est, en coordonnées obliques, de la forme

$$y^2 + Mx^2 + N = 0,$$

car il faut, 1° qu'à toute valeur de x répondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, et 2° que pour $y = 0$ on ait aussi deux valeurs de x égales et de signes contraires.

Cette dernière forme (la même que lorsque la courbe est rapportée à ses diamètres principaux) montre que chaque axe coupe les cordes parallèles à l'autre en leurs milieux. Les deux diamètres liés entre eux par cette propriété réciproque s'appellent *diamètres conjugués*. Il résulte de ce qui précède qu'à tout diamètre (droite menée par le centre, qui n'est pas une asymptote) répond un autre diamètre qui est son conjugué.

170. Lorsque $B^2 - 4AC$ est nul, le radical de l'équation (2) ne devient nul que pour une valeur de x; la courbe ne rencontre donc qu'en un point le diamètre déterminé par l'équation (3). D'après cela, si l'on transporte en ce point l'origine des coordonnées, en prenant pour l'axe des x ce diamètre, et l'axe des y parallèle à sa première direction, on réduira l'équation à la forme

$$y^2 = 2Px,$$

la même que lorsque les axes sont rectangulaires.

Une parabole pouvant être considérée (nos 132 et 136) comme une portion d'une ellipse ou d'une hyperbole dont les diamètres sont infinis, si l'on mène dans cette courbe des cordes parallèles et d'ailleurs quelconques, non-seulement leurs milieux sont, comme on vient de le voir, sur une droite, mais ce diamètre concourant à l'infini avec le diamètre principal lui est par conséquent parallèle. Ainsi *tous les diamètres d'une parabole sont parallèles entre eux*, ce qu'on vérifierait aisément en cherchant le *lieu* des milieux de cordes parallèles dans cette courbe.

§ VIII. ÉQUATIONS DE LA LIGNE DROITE HORS DES PLANS COORDONNÉS.

171. D'après ce qui a été dit en général au n° 6, le moyen le plus simple d'exprimer la situation d'une droite relativement à trois plans coordonnés est de donner les équations de ses projections coordonnées sur deux de ces trois plans. Si les deux plans de projection sont ceux des zx et des zy, les équations seront en général de la forme de celles-ci :

$$z = ax + p, \quad z = by + q.$$

Il faut bien comprendre que les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque de la droite dans l'espace, satisfont à la fois aux deux équations, et que chaque équation considérée séparément est satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque du *plan projetant* mené par la droite parallèlement à l'un des axes.

En éliminant z entre les deux équations ci-dessus, on a une relation entre les coordonnées x, y, d'un point quelconque de la droite ; et comme ces coordonnées sont aussi celles de la projection coordonnée de la droite sur le plan des xy, la relation qu'on obtient est l'équation de cette projection, savoir :

$$ax - by + p - q = 0.$$

172. Si l'on veut déterminer *la trace* de la droite sur l'un des plans coordonnés, par exemple celui des x et y, il faut évidemment faire $z = 0$ dans le système de deux équations qui exprime la droite : on aura ainsi les coordonnées de cette trace,

$$x = -\frac{a}{p}, \quad y = -\frac{q}{b}.$$

On a de même pour les traces

sur le plan des $xz \ldots y = 0, \quad z = q, \quad x = \frac{q-p}{a}$,

sur le plan des $yz \ldots x = 0, \quad z = p, \quad y = \frac{p-q}{b}$.

173. Si la droite était parallèle à l'un des plans coordonnés, l'une des deux équations à deux variables devrait être celle de sa projection sur ce plan. La seconde équation appartiendrait aux projections de la droite sur les deux autres plans.

Exemple. $\quad z = ax + b, \quad y = c.$

Si la droite était parallèle à l'un des axes, ses équations seraient indépendantes de la coordonnée parallèle à cet axe. Par exemple, la droite étant parallèle à l'axe des z, l'expression la plus simple de la droite est

$$x = m, \quad y = n,$$

m et n étant les coordonnées de la trace de cette droite sur le plan des x et y.

174. Problème. *Connaissant les équations de deux droites,*

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & z = ax + p \\ (2) & z = by + q \end{array}\right\} \text{pour la première,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & z = a'x + p' \\ (4) & z = b'y + q' \end{array}\right\} \text{pour la seconde,}$$

vérifier si ces droites se rencontrent, et, dans le cas de l'affirmative, trouver les coordonnées du point d'intersection.

Les quatre équations ci-dessus doivent être satisfaites par les trois inconnues x, y, z, coordonnées du point de rencontre.

Les équations (1) et (3) donnent

$$(5)\qquad (a-a')z = ap' - a'p.$$

Les équations (2) et (4) donnent

$$(6)\qquad (b-b')z = bq' - b'q.$$

Les équations (5) et (6) devant donner la même valeur de z, il faut que les constantes satisfassent à l'équation de condition suivante :

$$(a-a')(bq'-b'q) = (b-b')(ap'-a'p).$$

Quand elle a lieu, le reste du problème est aisé à résoudre.

175. Problème. *Connaissant les équations d'une droite* D *rapportée à trois axes rectangulaires, trouver les angles qu'elle forme avec ces axes.*

Transportons la droite parallèlement à elle-même de manière qu'elle passe par l'origine, ce qui se fait en supprimant les termes constants des équations. Les angles cherchés ne sont pas changés, et les deux équations peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Un point de la nouvelle droite, dont les coordonnées sont x, y, z est à une distance de l'origine exprimée en grandeur absolue par $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et en considérant le sens positif de la droite comme allant de l'origine à ce même point, on a pour les cosinus des angles cherchés :

$$\cos(\mathrm{D}, \mathrm{x}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\mathrm{D}, \mathrm{y}) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\mathrm{D}, \mathrm{z}) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Or, d'après les équations ci-dessus, x, y et z sont proportionnelles à a, b et c; donc

$$\cos(D, x) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos(D, y) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos(D, z) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

formules dans lesquelles il faut remarquer que les constantes a, b et c, sont positives ou négatives, qu'elles ne sont données que par leurs rapports (grandeurs et signes), qu'on peut par conséquent les multiplier par un nombre quelconque, et changer simultanément leurs signes, ce qui change ceux des trois cosinus et revient à changer le sens positif de la droite.

Réciproquement, sachant qu'une droite passe par l'origine des axes rectangulaires, si l'on se donne les angles qu'elle forme avec ces axes, c'est-à-dire les cosinus de deux d'entre eux et le signe du cosinus du troisième (42), on en conclura que les équations de la droite peuvent être posées comme il suit :

$$\frac{x}{\cos(D, x)} = \frac{y}{\cos(D, y)} = \frac{z}{\cos(D, z)},$$

ce qui revient à écrire, chose évidente, que les trois coordonnées d'un point de la droite menée par l'origine sont proportionnelles aux trois cosinus.

176. PROBLÈME. *Trouver les équations d'une droite passant par un point donné et parallèle à une autre droite donnée, ou faisant avec les axes rectangulaires des angles donnés.*

La droite donnée étant transportée à l'origine et parallèlement à elle-même, ses équations peuvent alors être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

et celles de la droite menée parallèlement par le point dont les coordonnées sont x', y', z' peuvent se ramener à celles-ci

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c},$$

ou bien, si les axes sont rectangulaires,

$$\frac{x-x'}{\cos(\mathrm{D}, \mathrm{x})}=\frac{y-y'}{\cos(\mathrm{D}, \mathrm{y})}=\frac{z-z'}{\cos(\mathrm{D}, \mathrm{z})}.$$

§ IX. ÉQUATION DU PLAN RAPPORTÉ A TROIS AUTRES PLANS COORDONNÉS.

177. Le procédé qui donne cette équation dépend de la génération qu'on adopte pour le plan.

Ce plan rencontrant nécessairement au moins l'un des axes, supposons que ce soit celui des z. Soit c la distance positive ou négative de l'origine à la rencontre C de cet axe (*fig.* 48). Les équations des deux traces, dans les deux plans coordonnés xOz et yOz, sont de la forme

$z=ax+c$ pour la trace D dans xOz,

et

$z=by+c$ pour la trace E dans yOz.

Considérons le plan comme la surface engendrée par une droite G qui, s'appuyant sur la droite D, directrice fixe, se meut parallèlement à la trace E, laquelle est, par conséquent, l'une des positions de cette génératrice.

Soient α et β les coordonnées parallèles à Ox et à Oy du point P, où la génératrice G coupe la directrice D. Elles satisfont à l'équation de cette droite, de sorte qu'on a

(1) $$\beta=a\alpha+c,$$

et la génératrice G, passant par P et étant parallèle à E, a pour équations

(2) $$x=\alpha,$$

et

(3) $$z=by+\beta.$$

Si, en conservant à la distance c et aux coefficients angulaires a et b leurs valeurs algébriques, on fait varier α, et par conséquent β, on pourra faire prendre au point P toutes les positions imaginables sur la directrice D. Ainsi les équations (1), (2) et (3) ont lieu entre les quantités α et β qui conviennent à la génératrice passant par un point quelconque du plan et les coordonnées x, y et z, de ce point. Donc, en éliminant α et β, on aura la relation cherchée, indépendante de la position particulière de la génératrice. Cette équation, qui exprime complétement la position du plan, est

$$z = ax + by + c.$$

Elle s'applique à tous les cas possibles, sauf celui où le plan serait parallèle à l'axe des z. Dans cette hypothèse, l'équation ne contiendrait (92, 2°) que les variables x et y, et ne différerait en rien de l'équation de la trace du plan sur celui de xy; elle serait donc de la forme

$$mx + ny + q = 0,$$

pouvant se réduire à $x = k$ ou $y = l$ si le plan était à la fois parallèle à deux axes coordonnés.

178. Réciproquement, toute équation du premier degré comprise dans la formule générale

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dans laquelle les variables x, y, z, sont les coordonnées d'un point variable, exprime toujours un plan. Car, à moins que C ne soit nul, auquel cas le plan serait parallèle à l'axe des z, on peut, en divisant par C, mettre l'équation sous la forme

$$z = ax + by + c,$$

et, par conséquent, concevoir la génération d'un plan (177) dont tous les points satisferaient, et satisferaient seuls, par leurs coordonnées à l'équation proposée.

179. *Intersections d'un plan avec les plans et les axes coordonnés.* Si dans l'équation d'un plan on fait l'une des coordonnées égale à zéro, on a l'équation de la *trace* du plan sur le plan des deux axes parallèles aux autres coordonnées.

Si dans l'équation d'un plan on fait simultanément deux coordonnées nulles, cette équation donne la troisième coordonnée égale à la distance de l'origine au point d'intersection du plan et de l'axe parallèle à cette coordonnée.

Tout plan passant par l'origine a son équation comprise dans la formule générale

$$Ax + By + Cz = 0.$$

180. Quand le plan ne passe pas par l'origine, l'équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

et p, q, r, sont (179) les distances de l'origine aux intersections du plan avec les trois axes.

181. On peut trouver l'équation d'un plan en le considérant comme une surface qui contient toutes les perpendiculaires menées à une droite par un même point de cette droite.

Quelle que soit la position du plan, soit ON (*fig.* 49) la droite menée de l'origine O perpendiculairement à ce plan, qu'elle rencontre en N. Soit M un point quelconque du plan, et soient x, y, z ses coordonnées.

Joignons M et N par la droite MN. Cette droite est perpendiculaire à ON, et, par conséquent, la longueur ON est la projection orthogonale de OM sur la droite ON. Mais la projection de OM est égale (22 et 48) à celle du contour polygonal OPCM, composé des coordonnées x, y, z, du point M. Donc, en faisant ON $= \delta$, on a

$$(1) \qquad \delta = x \cos \mathrm{NO}x + y \cos \mathrm{NO}y + z \cos \mathrm{NO}z.$$

Cette équation, dans laquelle δ et les trois cosinus sont des constantes, tant qu'il s'agit d'un même plan, est l'équation de ce plan.

Si la droite ON est donnée par ses équations, on peut demander l'équation du plan qui lui est perpendiculaire, en fonction de la distance δ et des coefficients qui déterminent la droite. Les équations de celle-ci peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Les cosinus des angles qu'elle forme avec les axes rectangulaires sont des fonctions de a, b, c qu'on trouve très-facilement (174), et l'équation (1) du plan perpendiculaire à cette droite, et dont la distance à l'origine est δ, devient par suite

$$\delta\sqrt{a^2+b^2+c^2}=ax+by+cz.$$

Réciproquement on peut se proposer la question suivante.

182. PROBLÈME. *Une droite étant menée de l'origine perpendiculairement à un plan donné, trouver les équations de cette perpendiculaire, les angles qu'elle forme avec les axes rectangulaires, les coordonnées de son pied sur le plan, et la distance de l'origine à ce pied.*

Soit l'équation du plan mise sous la forme

$$Ax+By+Cz=1.$$

Solution directe de la question. Une droite étant perpendiculaire à un plan, la projection orthogonale de la droite sur un second plan est perpendiculaire à la commune intersection des deux plans. Donc la perpendiculaire au plan donné a pour équations

$$y=\frac{B}{A}x \quad \text{et} \quad z=\frac{C}{A}x, \quad \text{ou bien} \quad \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}.$$

Les cosinus des angles qu'elle forme avec les axes sont proportionnels aux coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette droite, et par conséquent proportionnels aux coefficients A, B, C. De là et de ce que la somme des quarrés des trois cosinus est égale à 1, on conclut

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Les coordonnées x', y', z' du pied de la perpendiculaire satisfont aux équations du plan et de la droite; on obtient d'après cela

$$x' = \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y' = \frac{B}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z' = \frac{C}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Enfin, quant à la distance δ de l'origine au plan, on a

$$\delta^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Solution déduite de l'équation (1) du n° 181. En identifiant les deux équations

$$Ax + By + Cz = 1,$$

et

$$x\cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) + y\cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) + z\cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = \delta;$$

on a

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) = A\delta, \quad \cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) = B\delta, \quad \cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = C\delta,$$

et en élevant au quarré et ajoutant,

$$1 = \delta^2 (A^2 + B^2 + C^2).$$

De là on tire immédiatement δ et les trois cosinus.

Par suite, les équations de la perpendiculaire passant par l'origine qui sont

$$\frac{x}{\cos(N, x)} = \frac{y}{\cos(N, y)} = \frac{z}{\cos(N, z)},$$

deviennent

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

Enfin les coordonnées du pied sont

$$x' = \delta \cos(N, x) = A\delta^2 = \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2},$$
$$y' = \delta \cos(N, y), \text{ etc.}$$

183. Une droite peut être exprimée par les équations à trois variables de deux plans différents qui la contiennent. Il suffit de considérer ces deux équations comme devant être satisfaites simultanément par les coordonnées x, y, z. On peut, par deux éliminations successives d'une variable, obtenir un système équivalent, mais plus simple, de deux équations à deux variables; et ces équations sont alors tout à la fois celles des deux plans projetants qui y correspondent.

§ X. DE LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES PARALLÈLES A TROIS AXES, APPLIQUÉE AUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

184. La forme la plus générale d'une équation *algébrique* du second degré entre trois coordonnées x, y, z est celle-ci :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Bxy + B'xz + B''yz$$
$$+ Cx + C'y + C''z + D = 0.$$

On conçoit, par ce qui a été dit (161 et suiv.), qu'une telle équation, considérée comme exprimant une surface, peut

être simplifiée par la transformation des coordonnées sans cesser d'exprimer la même surface.

185. Par une méthode analogue à celle du n° 162, on obtient immédiatement des formules pour cette transformation.

Soient Ox, Oy, Oz, les axes primitifs faisant entre eux des angles quelconques;

a, b, c, les coordonnées de la nouvelle origine O';

O'x', O'y', O'z', les nouveaux axes quelconques.

M étant un point quelconque, considérons deux contours polygonaux conduisant de l'origine O à ce point M: l'un, composé de x, y, z, l'autre de a, b, c, x', y', z'. Leurs projections sur une droite quelconque sont égales, et peuvent fournir une relation entre les coordonnées primitives et les nouvelles. Pour obtenir directement x, y, z, en fonction de a, b, c, x', y', z', imaginons un axe auxiliaire OX, perpendiculaire au plan yOz: les projections de y, z, b, c, sur cet axe, sont nulles, et nous avons

$$x\cos(\mathrm{x},\mathrm{X}) = a\cos(\mathrm{x},\mathrm{X}) + x'\cos(\mathrm{x}'\mathrm{X}) + y'\cos(\mathrm{y}',\mathrm{X}) + z'\cos(\mathrm{z}',\mathrm{X}).$$

En considérant deux autres axes auxiliaires de projection, savoir: OY perpendiculaire au plan xOz, et OZ perpendiculaire au plan xOy, on a deux formules analogues:

$$y\cos(\mathrm{y},\mathrm{Y}) = b\cos(\mathrm{y},\mathrm{Y}) + x'\cos(\mathrm{x}',\mathrm{Y}) + y'\cos(\mathrm{y}',\mathrm{Y}) + z'\cos(\mathrm{z}',\mathrm{Y}),$$

$$z\cos(\mathrm{z},\mathrm{Z}) = c\cos(\mathrm{z},\mathrm{Z}) + x'\cos(\mathrm{x}',\mathrm{Z}) + y'\cos(\mathrm{y}',\mathrm{Z}) + z'\cos(\mathrm{z}',\mathrm{Z}).$$

186. Quelle que soit l'équation $F(x, y, z) = 0$ d'une surface, en y substituant à x, y, z, leurs expressions tirées

des formules ci-dessus, on aurait une équation en x', y', z', qui serait l'équation de la même surface rapportée aux nouveaux axes : les quantités a, b, c, et les cosinus qui entreraient dans la nouvelle équation, doivent être considérés comme connus dès que l'on connaît les angles des axes primitifs entre eux et la position des nouveaux axes par rapport aux anciens.

187. De ces considérations générales résultent quelques conséquences importantes dans le cas où l'équation $F(x,y,z)=0$ de la surface est algébrique.

1°. *L'équation transformée en x', y', z', est du même degré que l'équation primitive.* Le raisonnement pour le démontrer est celui du n°164.

2°. Si l'on coupe par un plan quelconque une surface dont l'équation $F(x, y, z) = 0$ est algébrique, *la courbe d'intersection est tout au plus du même degré que la surface*, c'est-à-dire que l'équation qui exprimerait cette courbe, rapportée à deux axes quelconques pris dans son plan, ne serait pas d'un degré supérieur à celui de l'équation $F(x, y, z) = 0$.

En effet, concevons qu'en transformant les coordonnées on prenne les axes des x' et des y' dans le plan coupant. La nouvelle équation de la surface en x', y', z', sera du même degré que la première. Or, il suffira d'y faire $z' = 0$ pour avoir l'équation de la courbe d'intersection, ce qui ne pourra jamais élever le degré.

3°. *Une droite ne peut percer une surface en un nombre de points plus grand que l'indice du degré de la surface,* mais elle peut, en certains cas, s'y appliquer tout entière.

En effet, en prenant la droite considérée pour axe des x', et faisant ensuite $y' = 0$ et $z' = 0$ simultanément dans l'équation transformée, on aura une équation en x', qui

sera, au plus, du même degré, et dont les racines seront les distances de l'origine O′ aux points d'intersection.

Si la supposition $y'=0$, $z'=0$, rendait l'équation de la surface satisfaite indépendamment de x', l'axe O′x′ serait tout entier sur la surface.

188. Si, au lieu de changer à la fois les trois axes, comme nous l'avons supposé au n° 185, on en conserve un, et qu'en déplaçant les deux autres on les laisse dans leur plan primitif, la transformation est plus simple. Supposons que l'on conserve l'axe Oz, et qu'on remplace Ox, Oy par Ox′, Oy′, l'ordonnée z d'un point M quelconque sera commune aux deux systèmes de coordonnées, et les relations entre x, y, x' et y', seront celles qui ont été établies au n° 162.

189. Appliquons cette observation à l'équation générale du second degré à trois coordonnées, afin de la réduire à la forme la plus simple, et parvenir ainsi plus facilement à caractériser les divers genres de surfaces que cette équation peut exprimer suivant les diverses valeurs de ses coefficients.

Nous supposerons rectangulaires les trois axes, en remarquant que, s'ils ne l'étaient pas, on pourrait les remplacer par d'autres qui le seraient, sans changer le degré de l'équation exprimant la même surface (187, 1°).

Cela posé, en conservant l'axe Oz, et en raisonnant quant aux deux autres comme on l'a fait au n° 167, on voit qu'on peut toujours faire disparaître le terme contenant le produit xy. Nous supposerons donc, pour simplifier nos calculs, que B soit nul dans l'équation du n° 184, qui devient

$$\begin{aligned}Ax^2+A'y^2+A''z^2+B'xz+B''yz\\+Cx+C'y+C''z+D=0,\end{aligned}$$

et qui peut aussi bien exprimer toute surface du second degré.

190. Démontrons *qu'il est toujours possible de diriger l'axe des z, les coordonnées restant rectangulaires, de manière que l'équation, exprimant toujours la même surface qu'auparavant, ne contienne plus les produits xz, yz.*

Soit OZ la direction cherchée (*fig.* 50);

Soit Ox′ la projection orthogonale de OZ sur le plan xOy;

Et soit OY menée par l'origine O et dans le plan xOy perpendiculairement à Ox′. Cette droite sera par conséquent perpendiculaire à OZ.

Si l'on voulait prendre Ox′, OY et l'ancien Oz, pour nouveaux axes coordonnés, il faudrait (188 et 165), en faisant $xOx' = \theta$, substituer dans l'équation de la surface les expressions

$$x = x' \cos\theta - Y \sin\theta,$$
$$y = x' \sin\theta + Y \cos\theta,$$

et laisser z sans changement.

Cette substitution faite, on pourrait changer les deux axes rectangulaires Ox, Oz, et les remplacer par OX, OZ, également rectangulaires, et dans le même plan perpendiculaire à OY.

Pour cela, il faudrait, en appelant γ l'angle zOZ, substituer dans la transformée précédemment obtenue

$$z = Z \cos\gamma - X \sin\gamma,$$
$$x' = Z \sin\gamma + X \cos\gamma,$$

et laisser Y sans changement.

Or, ces deux substitutions successives reviennent à mettre immédiatement dans l'équation primitive les valeurs sui-

vantes :

$$z = Z\cos\gamma - X\sin\gamma,$$
$$x = (Z\sin\gamma + X\cos\gamma)\cos\theta - Y\sin\theta,$$
$$y = (Z\sin\gamma + X\cos\gamma)\sin\theta + Y\cos\theta.$$

Faisons donc cette substitution immédiate, mais en n'écrivant que les termes en XZ et YZ, que nous voulons faire disparaître. Nous aurons ainsi les termes :

$$\left.\begin{array}{l} 2A\sin\gamma\cos\gamma\cos^2\theta \\ +\,2A'\sin\gamma\cos\gamma\sin^2\theta \\ -\,2A''\sin\gamma\cos\gamma \\ +\,B'\cos^2\gamma\cos\theta \\ -\,B'\sin^2\gamma\cos\theta \\ +\,B''\cos^2\gamma\sin\theta \\ -\,B''\sin^2\gamma\sin\theta \end{array}\right| XZ \quad \left.\begin{array}{l} -\,2A\sin\gamma\sin\theta\cos\theta \\ +\,2A'\sin\gamma\sin\theta\cos\theta \\ -\,B'\cos\gamma\sin\theta \\ +\,B''\cos\gamma\cos\theta \end{array}\right| YZ$$

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe toujours pour l'axe OZ une position telle, que les angles θ et γ qui lui appartiennent rendent nuls, dans l'équation transformée, les deux polynômes coefficients de XZ et de YZ.

Prenons sur OZ, à partir de l'origine, une distance représentée par 1. Appelons a, b, c, ses projections sur les trois axes primitifs, et d sa projection sur l'axe Ox'. Il est facile de voir qu'on a

$$\cos\gamma = c, \quad \sin\gamma = d, \quad \cos\theta = \frac{a}{d}, \quad \sin\theta = \frac{b}{d}.$$

Substituons ces expressions dans les deux polynômes coefficients de XZ et de YZ, que nous égalerons à zéro ; nous aurons deux équations :

$$2Adc\frac{a^2}{d^2} + 2A'dc\frac{b^2}{d^2} - 2A''cd + B'\frac{a}{d}(c^2 - d^2)$$
$$+ B''\frac{b}{d}(c^2 - d^2) = 0,$$

$$-2(A - A')\frac{ab}{d} - B'\frac{cb}{d} + B''\frac{ca}{d} = 0,$$

ou plus simplement

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 2Aca^2 + 2A'cb^2 - 2A''cd^2 + B'a(c^2 - d^2) \\ \qquad + B''b(c^2 - d^2) = 0, \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad 2(A - A')ab + B'cb - B''ca = 0.$$

Ces deux équations jointes aux deux relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\quad a^2 + b^2 = d^2,$$

renferment les conditions nécessaires pour déterminer les quantités a, b c, d'où dépend la position de l'axe OZ.

En multipliant l'équation (1) par a et l'équation (2) par bc, puis ajoutant, on trouve

$$\begin{array}{l} 2Aac(a^2 + b^2) - 2A''acd^2 + B'c^2(a^2 + b^2) \\ \qquad\qquad + B'a^2d^2 - B''abd^2 = 0, \end{array}$$

ou, en divisant par d^2 égal à $a^2 + b^2$,

$$(3)\quad 2(A - A'')ac + B'c^2 - B'a^2 - B''ab = 0.$$

Les équations (2) et (3) se simplifient encore en posant $\frac{a}{c} = \alpha$, $\frac{b}{c} = \beta$, et en substituant $a = c\alpha$, $b = c\beta$; elles deviennent

$$(4)\qquad [2(A - A')\alpha + B']\beta - B''\alpha = 0,$$

$$(5)\qquad 2(A - A'')\alpha + B' - B'\alpha^2 - B''\alpha\beta = 0,$$

d'où, en éliminant β, on tire l'équation finale en α :

$$(6)\quad \left\{ 2(A - A')B'\alpha^3 - \left.\begin{array}{r} 4(A - A')(A - A'') \\ + B'^2 \\ + B''^2 \end{array}\right| \alpha^2 - \left.\begin{array}{r} 2B'(A - A') \\ - 2B'(A - A'') \end{array}\right| \alpha - B'^2 = 0 \right.$$

Nous n'avons pas à nous occuper du cas où B' et B'' seraient tous deux nuls, puisque l'équation du n° 189 ne contiendrait pas les produits xz et yz. Si B' seul était nul, il

suffirait de faire permuter l'axe des x et celui des y pour que le coefficient de xz dans cette équation devînt B'' et cessât par conséquent d'être nul. Nous ne nous arrêterons donc pas non plus à cette hypothèse.

Si l'on avait $A = A'$, l'équation (6) réduite à

$$(B'^2 + B''^2)\,\alpha^2 - 2B'(A - A'')\,\alpha - B'^2 = 0,$$

aurait nécessairement deux racines réelles.

Dans tout autre cas, il existera toujours au moins une valeur réelle de α, positive ou négative, qui satisfera à l'équation (6) : car c'est, en algèbre, une proposition générale et facile à démontrer que *toute équation de degré impair, à une inconnue, a au moins une racine réelle.* Cette valeur de α étant substituée dans l'équation (4), celle-ci donnera la valeur correspondante et également réelle de β. Enfin, α et β étant connus, les équations

$$a = c\alpha, \quad b = c\beta, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

donneront aisément a, b, c, et, par conséquent, la direction OZ, qui est celle de la diagonale du parallélipipède rectangle dont les arêtes sont a, b, c, suivant les axes primitifs.

191. Il résulte de la démonstration précédente que l'équation la plus générale du second degré, après avoir subi, par le déplacement de deux axes, la modification indiquée au n° 189, pourra, au moyen d'une nouvelle transformation, être remplacée par une autre, comprise dans la formule suivante, en coordonnées rectangulaires :

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + B_1 xy$$
$$+ C_1 x + C y'_1 + C''_1 z + D = 0.$$

Le terme en xy a été introduit par la seconde transformation; mais, suivant l'observation faite au n° 189, il est

toujours possible de le faire disparaître par le déplacement des x et des y dans leur plan.

De là résulte cette conséquence fondamentale dans la classification des surfaces du second degré : c'est que *leurs équations en coordonnées rectangulaires peuvent toujours être amenées à ne plus contenir aucun des produits* xy, xz, yz.

§ XI. CLASSIFICATION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

192. Toutes ces surfaces sont comprises (**191**) dans l'équation suivante en coordonnées rectangulaires :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + 2Q''z + R = 0.$$

Les trois coefficients P, P', P'', ne peuvent être nuls à la fois (**187**, 1°). Supposons d'abord qu'*aucun d'eux ne le soit*. On pourra écrire ainsi l'équation :

$$P\left(x+\frac{Q}{P}\right)^2 + P'\left(y+\frac{Q'}{P'}\right)^2 + P''\left(z+\frac{Q''}{P''}\right)^2 = \frac{Q^2}{P} + \frac{Q'^2}{P'} + \frac{Q''^2}{P''} - R,$$

ou, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes,

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = S.$$

Le caractère général des surfaces exprimées par cette formule est que l'origine actuelle des coordonnées est le milieu de toute corde passant par ce point. En effet, si certaines valeurs de x, y et z, sont les coordonnées d'un point de la surface, et satisfont, par conséquent, à la dernière équation, des valeurs égales et de signes contraires y satisfont également, et sont évidemment les coordonnées d'un point situé à la même distance de l'origine, à l'opposé du premier.

Le point milieu de toutes les cordes qui y passent s'appelle le *centre de figure*, ou simplement le *centre* de la surface.

193. On peut toujours faire en sorte que dans l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = S,$$

deux des coefficients P, P', P'', soient positifs. Supposons que ce soient P et P', et faisons sur P'' et S toutes les hypothèses possibles. Si P'' était positif et S négatif, l'équation exprimerait une *impossibilité*. Il ne reste qu'à discuter les trois cas suivants :

Ier Cas des surfaces à centre. P'' et S positifs.

194. Dans ce cas, l'équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Elle exprime une surface limitée, car x, y, z, ne peuvent être plus grands que a, b, c.

Cette surface est coupée par les plans coordonnés suivant des ellipses dont les diamètres principaux sont $2a$, $2b$, $2c$.

Cette surface s'appelle *ellipsoïde*.

Elle devient *ellipsoïde de révolution* quand *deux* des constantes a, b, c sont égales. Si, par exemple, l'équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on voit qu'en y faisant z égale à une constante quelconque, mais plus petite que c, on aura en x et y l'équation d'un cercle. Or cette supposition revient à couper la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des z.

L'ellipsoïde dégénère en sphère quand les trois diamètres principaux deviennent égaux, son équation étant alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

IIe Cas des surfaces à centre. P'' négatif, S positif.

195. Dans ce cas, l'équation (**193**) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'intersection de la surface avec le plan des xy est une ellipse dont les diamètres principaux sont $2a$ et $2b$.

Son intersection avec tout autre plan perpendiculaire à l'axe des z, courbe dont l'équation s'obtient en faisant z égale à une constante quelconque, positive ou négative, est encore une ellipse ayant son centre sur l'axe des z, et les diamètres augmentent avec cette valeur de z.

Les sections ou traces de la surface dans les plans des x et z et des y et z, obtenues en faisant séparément $y=0$ et $x=0$, sont des hyperboles dont les diamètres principaux transverses sont $2a$ et $2b$.

Cette surface continue dans son étendue illimitée s'appelle *hyperboloïde à une nappe*.

Elle devient *un hyperboloïde de révolution à une nappe* lorsque a et b ou P et P' sont égaux.

IIIe Cas des surfaces à centre. P'' et S'' négatifs.

196. Dans ce cas, l'équation (**193**) peut s'écrire ainsi :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Le plan des x et y ne rencontre pas la surface, car l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ n'a aucune solution. Il en est de même de tout plan perpendiculaire à l'axe des z dont la distance au plan des x et y est moindre que c. A cette distance c, positive ou négative, l'axe des z perce la surface. A une distance plus grande la section faite par tout plan perpendicu-

laire à l'axe des z est une ellipse dont le centre est sur cet axe, et dont les diamètres augmentent avec cette distance.

Les sections ou traces de la surface dans les plans des x et z et des y et z sont des hyperboles ayant un même diamètre transverse égal à $2c$, suivant l'axe des z.

Cette surface, composée de deux parties séparées, s'appelle *hyperboloïde à deux nappes*.

Elle devient *un hyperboloïde de révolution à deux nappes* lorsque a et b ou P et P' sont égaux.

197. Passant à la seconde hypothèse sur l'équation générale du n° **192**, supposons que P soit nul, P' et P'' ne l'étant pas. L'équation peut alors s'écrire ainsi, pourvu que Q ne soit pas nul,

$$P'\left(y+\frac{Q'}{P'}\right)^2+P''\left(z+\frac{Q''}{P''}\right)^2$$
$$+2Q\left[x+\frac{1}{2Q}\left(R-\frac{Q'^2}{P'}-\frac{Q''^2}{P''}\right)\right]=0,$$

ou, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes,

$$\frac{y^2}{2p'}+\frac{z^2}{2p''}=x,$$

p' et p'' désignant des constantes positives ou négatives.

Une propriété générale des surfaces exprimées par cette équation, c'est qu'elles sont dénuées de centre. En effet, en quelque point de l'espace que l'on transporte l'origine, en laissant les axes parallèles à leur direction actuelle, l'équation sera renfermée dans la formule

$$\frac{(y-b)^2}{2p'}+\frac{(z-c)^2}{2p''}=x-a.$$

Or, dans ce cas, l'origine ne peut être un centre, parce que l'équation, satisfaite par certaines valeurs de x, y, z, ne le sera plus par ces valeurs changées de signes.

Les surfaces dénuées de centre présentent deux cas distincts.

Ier Cas des surfaces dénuées de centre. P' et P'' ou p' et p'' de même signe.

198. Si p' et p'' étaient négatifs, ils deviendraient positifs par le changement de sens de l'axe des x.

p' et p'' étant donc supposés positifs, on voit, en faisant successivement $y=0$ et $z=0$, que les plans des xz et des xy coupent la surface suivant des paraboles dont le diamètre principal est l'axe positif des x, et dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

Un plan perpendiculaire à l'axe des x, dans sa partie négative, ne rencontre point la surface. Si, au contraire, il coupe l'axe des x dans sa partie positive, à une distance quelconque, son intersection avec la surface est une ellipse.

Cette surface s'appelle *paraboloïde elliptique*.

Lorsque p' et p'' sont égaux, elle devient un *paraboloïde de révolution* engendré par la rotation d'une parabole autour de son diamètre principal.

IIe Cas des surfaces dénuées de centre. P' et P'' ou p' et p'' de signes contraires.

199. Dans ce cas, l'équation prend la forme

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x,$$

p et q étant des longueurs absolues non susceptibles de signes.

Les plans des xz et des xy coupent encore la surface suivant des paraboles qui ont leurs sommets à l'origine ; mais le diamètre principal de l'une est suivant l'axe négatif

des x, tandis que celui de l'autre est suivant la partie positive du même axe.

Si, au lieu de $z=0$, on fait z égal à une constante quelconque, on obtient pour la section faite par un plan parallèle à celui des xy une parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px + \text{constante},$$

et qui, par conséquent, est toujours de même grandeur, quelle que soit la distance du plan coupant à l'origine. Cette parabole a son diamètre principal dans le plan des xz et parallèle à l'axe positif des x. Il s'ensuit que la surface peut être considérée comme engendrée par une parabole dont le plan se meut parallèlement à celui des xy, dont le diamètre principal reste dans le plan des xz, et dont le sommet parcourt une parabole fixe, dont le plan est celui de xz et dont le diamètre principal est dirigé en sens contraire de celui de la parabole mobile.

Si, en faisant x égal à une constante, on cherche l'intersection de la surface par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x, on trouve l'équation d'une hyperbole qui se réduit à deux droites quand on fait $x=0$.

Cette surface s'appelle *paraboloïde hyperbolique.*

200. On a vu que, lorsque dans l'équation générale du n° 192 les coefficients P, P', P'', sont tous différents de zéro, cette équation peut toujours se réduire à la forme

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = S.$$

Mais il peut arriver que S soit nul, et, dans cette hypothèse, il faut distinguer deux cas.

201. *Ier Cas particulier.* Dans l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$$

les trois coefficients sont de même signe.

L'équation, ne pouvant être satisfaite que par $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ simultanément, n'exprime qu'*un seul point*.

202. *IIe Cas particulier.* Les trois coefficients ne sont pas de même signe.

L'équation peut être écrite ainsi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0.$$

Les sections de la surface par les plans des x et z et des y et z se composent chacune de deux droites passant par l'origine. La surface est un *cône*. En effet, si x', y', z', sont les coordonnées d'un de ces points et satisfont à l'équation, tout autre point de la droite passant par ce premier point et par l'origine aura pour coordonnées les produits mx', my', mz', des premières par un même nombre. Or ces produits satisferont également à l'équation. Donc la droite dont il s'agit est tout entière sur la surface (*).

La surface devient un *cône de révolution* quand a et b sont égaux.

203. Toute surface conique du second degré, coupée par un plan qui ne passe pas par le sommet, ne peut donner pour intersection que l'une des trois courbes du second degré (187, 2°), et donne une ellipse, une parabole et une hyperbole, suivant que le plan coupe toutes les génératrices rectilignes, ou qu'il est parallèle à l'une d'elles seulement, ou qu'il est parallèle à deux génératrices. De là le nom de *sections coniques* donné par les anciens géomètres aux courbes du deuxième degré.

Les hyperboloïdes, dont le cône est le cas particulier, ont

(*) Le même raisonnement prouve que toute équation algébrique en x, y, z, dont tous les termes sont du même degré, exprime une surface conique dont le sommet est l'origine des coordonnées.

la même propriété de fournir les trois courbes par leurs sections planes.

204. En discutant (197) l'équation générale du n° 192 dans l'hypothèse où P serait nul, P' et P'' ne l'étant pas, nous avons excepté le cas où Q serait nul en même temps. Si P et Q étaient nuls, l'équation pourrait se ramener à la forme

$$P'y^2 + P''z^2 = S,$$

qui appartient en général à une surface cylindrique (77) dont les génératrices rectilignes sont parallèles à l'axe des x.

Elle comprend quatre nouveaux cas particuliers.

205. *IIIe Cas particulier.* Si P' et P'' sont de même signe, et que S ne soit pas nul, il est aussi de même signe, sans quoi il y aurait *impossibilité,* et la surface est un *cylindre à base elliptique.*

206. *IVe Cas particulier.* Si, P' et P'' étant de même signe, S est nul, l'équation, qui ne peut être satisfaite que par $y = 0$ et $z = 0$, indépendamment de x, exprime *une seule droite,* qui est ici l'axe des x.

207. *Ve Cas particulier.* Si, P' et P'' étant de signes contraires, S n'est pas nul, la surface est un *cylindre à base hyperbolique.*

208. *VIe Cas particulier.* Si, P' et P'' étant de signes contraires, S est nul, l'équation, de la forme $y^2 - m^2z^2 = 0$, ou $y = \pm mz$, exprime *deux plans qui se coupent* suivant l'axe des x.

209. Il reste encore à examiner les cas où deux des coefficients P, P', P'', de l'équation du n° 192, deviennent nuls. Cette équation peut alors s'écrire ainsi

$$P''\left(z + \frac{Q''}{P''}\right)^2 + 2Qx + 2Qy + R - \frac{Q''^2}{P''^2} = 0,$$

ou, en transportant parallèlement les axes de x et des y,

$$P''z^2 + 2Qx + 2Q'y = S,$$

équation qui comporte trois cas distincts.

210. *VIIe Cas particulier.* Si aucun des coefficients Q, Q', n'est nul, quel que soit S, la surface coupée par un plan quelconque parallèle au plan des x et y donne une droite parallèle à celle qui dans ce plan aurait l'équation

$$y = -\frac{Q}{Q'}x.$$

Les sections dans les plans des x et z et des y et z sont des paraboles ; la surface est donc *un cylindre à base parabolique.*

Il en serait de même si l'un des coefficients Q, Q', était nul, quel que fût S.

211. *VIIIe Cas particulier.* Si Q et Q' sont tous deux nuls, S ne l'étant pas, l'équation, réduite à $P''z^2 = S$ ou $z = \pm\sqrt{\frac{S}{P''}}$, exprime *deux plans parallèles.*

212. *IXe Cas particulier.* Enfin si Q, Q' et S, sont nuls à la fois, l'équation $P''z^2 = 0$, satisfaite seulement par $z = 0$, indépendamment de x et de y, exprime *un seul plan*, qui, par les transformations, est devenu celui des x et y.

213. Ainsi, outre les cinq principaux genres de surfaces que peuvent exprimer les équations du second degré à trois variables, on peut trouver comme cas particuliers :

Trois espèces de cylindres, le cône, deux plans qui se coupent, deux plans parallèles, un seul plan, une droite et un point unique.

§ XII. PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ. SIMILITUDE DES SECTIONS PARALLÈLES.

214. Quelle que soit une surface du second degré, prenons pour axe des z une droite qui la coupe en deux points, le plan des x et y étant d'ailleurs quelconque, son équation sera de la forme

$$z^2 + Ax^2 + A'y^2 + Bxy + B'xz + B''yz \\ + Cx + C'y + C''z + D = 0;$$

d'où

$$z = -\frac{1}{2}(B'x + B''y + C'') \pm \sqrt{R},$$

en désignant par R un polynôme en x et y du second degré au plus. On voit aisément par là que le plan dont l'équation est

$$z = -\frac{1}{2}(B'x + B''y + C'')$$

coupe toutes les cordes parallèles à la première en leurs milieux. Ce plan s'appelle *plan diamétral.*

Il existe une infinité de *plans diamétraux,* puisqu'on peut donner à une corde une infinité de directions.

215. Si l'on prend pour plan des x et y le plan diamétral qu'on vient de trouver, en conservant le premier axe des z, l'équation de la surface ne contiendra plus z au premier degré et sera de la forme

$$z^2 + A_1x^2 + A'_1y^2 + B_1xy + C_1x + C'_1y + D = 0.$$

Cela étant, en changeant la position des axes des x et des y dans leur plan, et laissant l'axe des z parallèle à sa première direction, on pourra réduire le polynôme en x et y qui accompagne z^2 à trois termes ou à deux, suivant le

cas (nos 166 et 167). Donc l'équation de la surface deviendra

$$z^2 + My^2 + Nx^2 + P = 0 \text{ si elle a un centre,}$$

ou

$$z^2 + My^2 + Px = 0 \text{ si elle n'a pas de centre.}$$

Ces formes sont précisément celles que nous avons discutées aux nos 194 et suivants. La seule différence est ici que les trois axes ne sont pas rectangulaires.

Il est à remarquer que, d'après ce qu'on a vu aux nos 169 et 170, il y a une infinité de systèmes d'axes des y et des x pour lesquels, l'axe des z restant le même, les formes des équations ci-dessus ne changeraient pas.

216. On appelle *diamètre* d'une surface du second degré une droite dont la propriété est de contenir les centres des sections faites par des plans parallèles entre eux.

D'après ce qu'on vient de voir, toute droite menée par le centre d'une surface du second degré parallèlement à une corde qui rencontre cette surface en deux points est un diamètre.

Lorsque trois diamètres sont tels, qu'en les prenant pour axes coordonnés on a l'équation de la surface sous la forme

$$z^2 + My^2 + Nx^2 + P = 0,$$

chacun d'eux contient les centres des sections parallèles au plan des deux autres; on les appelle *diamètres conjugués*.

Lorsque l'équation d'un paraboloïde est sous la forme

$$z^2 + My^2 + Px = 0,$$

l'axe des x est un diamètre; mais il n'en est pas de même des deux autres axes.

217. *Lemme.* D'après la définition de la similitude en

général (*), *deux courbes planes sont semblables et semblablement placées par rapport aux axes coordonnés, lorsque, l'équation de l'une étant* $F(x, y) = 0$, *l'équation de l'autre est* $F(kx, ky) = 0$, k *indiquant un nombre constant, qui est le rapport de similitude, et la notation* F *indiquant la même fonction dans les deux équations.*

Il résulte de là :

1°. Que les deux courbes à centre dont les équations sont

$$y^2 + nx^2 = p, \qquad y^2 + nx^2 = p'$$

(le coefficient n étant le même dans les deux équations), sont semblables et semblablement placées par rapport à l'origine si p et p' sont de même signe; car en faisant $p' = \frac{p}{k^2}$,

---

(*) Un système de points M, N, P,... (formant soit des lignes, soit des surfaces, soit un ou plusieurs corps), étant situé d'une manière quelconque dans l'espace, si l'on prend un point S aussi quelconque (pouvant comme cas particulier être l'un de ceux du système), qu'on mène les droites SM, SN, SP,..., et que sur ces droites prolongées au besoin on porte, à partir du point, les distances SM', SN', SP',..., proportionnelles à SM, SN, SP,..., et dirigées respectivement dans le même sens, les points M', N', P', ainsi obtenus, formeront un système *semblable* au système M, N, P,..., et *semblablement placé* par rapport au point S, qui s'appelle *pôle commun de similitude*. Les points M', N', P',..., sont respectivement *homologues* des points M, N, P,.... Les droites M'N' et MN, qui joignent deux points d'un système et leurs homologues dans l'autre, sont des *droites homologues*. Enfin deux plans passant l'un par trois points d'un système et l'autre par les trois homologues du système semblable sont *deux plans homologues*. Cela posé, on démontre : 1° que dans deux systèmes semblables et semblablement placés deux *droites homologues* quelconques sont parallèles, et que leurs longueurs sont entre elles dans le rapport des distances de deux points homologues quelconques au pôle commun ; 2° que les plans homologues sont parallèles ; 3° que les angles plans, dièdres ou polyèdres, homologues, sont égaux. — Deux systèmes peuvent être semblables sans être semblablement placés ; mais il faut pour cela qu'il soit possible d'en construire un troisième égal à l'un d'eux et en même temps semblable à l'autre et semblablement placé par rapport à un pôle commun. On démontre aisément d'après ces principes que deux systèmes semblables à un troisième sont semblables entre eux.

on voit que la seconde équation équivaut à

$$k^2y^2 + nk^2x^2 = p.$$

2°. Que deux paraboles quelconques dont les équations sont

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = 2p'x,$$

sont semblables et semblablement placées par rapport à l'origine si p et p' ont même signe; car si l'on fait $p' = \frac{p}{k}$, la seconde équation équivaut à

$$k^2y^2 = 2p.kx.$$

218. Théorème. 1°. *Si un plan coupe une surface du second degré suivant une courbe à centre, il en est de même de toutes les sections planes parallèles à la première: tous les diamètres principaux de ces sections sont dans deux mêmes plans, et par conséquent leurs centres sont sur une même droite.*

2°. *Si l'une des sections est une ellipse, toutes les autres sont des ellipses semblables dont les lignes homologues sont parallèles.*

3°. *Si l'une des sections est une hyperbole, toutes les autres sont des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles et qui peuvent former deux groupes distincts d'hyperboles semblables.*

4°. *Si la première section est une parabole, toutes les sections parallèles sont aussi des paraboles, qui ont leurs diamètres principaux dans un même plan.*

Démonstration. 1°. Soit la première section rapportée à ses deux diamètres principaux pris pour axes rectangulaires des z et y. L'équation sera de la forme

$$z^2 + py^2 + q = 0.$$

Imaginons le plan diamétral qui correspond dans la sur-

face aux cordes parallèles à l'axe des z. Ce plan diamétral rencontrera le plan coupant suivant l'axe des y, puisque cet axe a, dans le plan de la section, la propriété de passer par les milieux de toutes les cordes parallèles à l'axe des z. Enfin prenons l'axe des x, dans le plan diamétral, suivant le diamètre qui coupe en leurs milieux les cordes parallèles à l'axe des y. L'équation de la surface rapportée aux trois axes ainsi définis sera de la forme

$$z^2 + py^2 + q + mx^2 + nx = 0.$$

Or, si, pour obtenir une section faite par un plan parallèle à celui des zy, on fait $x =$ constante, on trouve une courbe ayant un centre situé sur l'axe des x et deux diamètres conjugués qui, étant dans les plans des zx et des yx, sont parallèles aux axes rectangulaires des z et des y.

2°. Si la première section est une ellipse, p est positif; et, tant que x n'est pas assez grand pour rendre imaginaires les sections parallèles, ces sections restent des ellipses semblables, puisque le coefficient p de y^2 ne change pas. Par la même raison les axes homologues des sections sont dans un même plan.

3°. Si la première section est une hyperbole, p est négatif et peut être remplacé par $-l^2$; l'équation de la surface devient

$$z^2 - l^2y^2 + q + mx^2 + nx = 0.$$

La première section a pour asymptotes deux droites dont les équations sont

$$z = \pm ly;$$

et, suivant que q est positif ou négatif, l'axe des z est le diamètre principal transverse ou non transverse.

Toutes les sections parallèles seront également des hyperboles, puisque le coefficient $-l^2$ de y^2 ne change pas, et

leurs asymptotes, ayant toujours la même équation en z et y, seront par conséquent dans deux mêmes plans et parallèles.

Ces hyperboles seront semblables tant que, en faisant varier x, on ne changera pas le signe du trinôme $q+mx^2+nx$. Mais si ce signe change, le diamètre transverse de la nouvelle hyperbole devient parallèle au diamètre non transverse de la première, et *vice versâ*. Les deux courbes ne sont plus semblables : l'une occupe les deux angles aigus de ses asymptotes, l'autre les deux angles obtus des siennes.

Quand le trinôme $q+mx^2+nx$ peut changer de signe, il y a une valeur de x qui le rend nul, et alors la section se réduit à deux droites parallèles aux asymptotes des sections parallèles.

4°. Si la première section est une parabole, on peut choisir les axes rectangulaires des z et des y de manière que son équation soit

$$z^2 - 2py = 0.$$

Prenons l'axe des x dans le plan diamétral correspondant à l'axe des z; l'équation de la surface sera comprise dans la formule suivante :

$$z^2 - 2py + mx^2 + nxy + qx = 0,$$

les coefficients m, n, q, pouvant être nuls séparément ou tous à la fois. Or il est facile de reconnaître (138) que, si l'on y fait $x =$ constante, on aura toujours l'équation d'une parabole dont le diamètre principal sera dans le plan des x et y, par conséquent parallèle à l'axe des y. Ce diamètre sera dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe des y, suivant que $2p - nx$ sera positif ou négatif. Lorsque ce binôme sera nul, la section dégénérera en deux droites parallèles, ou même en une seule droite si l'on a en même temps

$$2p - nx = 0 \quad \text{et} \quad mx^2 + qx = 0.$$

§ XIII. DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

219. THÉORÈME. *Toute surface engendrée par une ligne droite mobile qui s'appuie sur trois droites fixes non situées dans un même plan est une surface du second degré. C'est un hyperboloïde à une nappe si les trois directrices ne sont pas parallèles à un même plan. C'est un paraboloïde hyperbolique dans le cas contraire.*

220. Pour démontrer la proposition dans le premier cas, menons par chaque directrice deux plans respectivement parallèles aux deux autres. Nous aurons six plans parallèles deux à deux, déterminant un parallélipipède dont les directrices seront trois arêtes.

Soient LL'MM' (*fig.* 52) ce parallélipipède, et LL', MM', NN', les trois directrices.

Par le centre O du parallélipipède, menons les trois axes coordonnés Ox, Oy et Oz, parallèles aux arêtes; ils rencontrent les faces aux points A, B, C.

Faisons $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Soient maintenant les équations d'une génératrice quelconque

$$x = mz + n, \tag{1}$$

$$y = m'z + n'. \tag{2}$$

Cette droite devant rencontrer la directrice LL', dont les équations sont $y = b$, $z = -c$, il faut (176) que ces valeurs de y et de z puissent satisfaire à l'équation (2). Ce qui fournit la relation

$$b = -m'c + n'. \tag{3}$$

De même la condition de rencontrer MM', dont les équa-

tions sont $x = -a$, $z = c$, donne l'équation

(4) $$-a = mc + n.$$

Enfin la génératrice rencontrant NN', dont les équations sont $x = a$, $y = -b$, il y a une valeur de z qui, jointe à ces valeurs de x et y, satisfait aux équations de la génératrice. D'où l'on conclut la relation

(5) $$\frac{a-n}{m} = \frac{-b-n'}{m'}.$$

Les cinq équations ci-dessus posées existent pour les coordonnées d'un point quelconque de la surface et pour les constantes relatives à la génératrice passant par ce point. Donc si l'on élimine les quantités m, n, m', n', il restera entre les coordonnées x, y, z, une équation qui sera celle de la surface.

De (1) et (4) on déduit

(6) $$x + a = m(z - c) \quad \text{et} \quad -az - cx = n(z - c).$$

De (2) et (3) on déduit

(7) $$y - b = m'(z + c) \quad \text{et} \quad bz + cy = n'(z + c).$$

On peut tirer de là les valeurs de m, n, m', n', et les substituer dans l'équation (5). Il est aisé de reconnaître qu'on a, sans écrire aucun calcul, en multipliant à vue le premier membre de (5) haut et bas par $(z - c)$, et le second membre par $(z + c)$, et mettant immédiatement pour $n(z - c)$, $m(z - c)$, $n'(z + c)$ et $m'(z + c)$, leurs valeurs tirées de (6) et (7),

$$\frac{a(z-c) + az + cx}{x + a} = \frac{-b(z+c) - bz - cy}{y - b};$$

d'où, faisant disparaître les dénominateurs et réduisant,

$$cxy + bxz + ayz + abc = 0,$$

équation cherchée, qui est du second degré.

La surface qu'elle représente a un *centre*, qui est l'origine des coordonnées, puisque cette équation étant satisfaite par trois valeurs de x, y et z, l'est également par ces trois valeurs changées de signe (192). D'après sa génération, cette surface est continue et d'une étendue illimitée; elle n'est ni un cylindre ni un cône : donc elle est un *hyperboloïde à une nappe*.

221. Pour démontrer le second cas de la proposition du n° 219 :

Soit Oz (*fig.* 53) une position particulière de la génératrice, et soient O, B, C, les points où elle coupe les trois directrices OO′, BB′, CC′, parallèles à un même plan.

Par le point O de la première menons les axes Ox, Oy, respectivement parallèles aux deux autres. OO′ est dans le plan de ces deux axes.

Les équations des trois directrices, au moyen de ce choix des axes, n'exigent que trois constantes, et sont telles que celles-ci :

Pour OO′, $y = \alpha x$, $z = 0$,

Pour BB′, $z = h$, $y = 0$,

Pour CC′, $z = h'$, $x = 0$.

Cela posé, soient les équations d'une génératrice quelconque

$$z = mx + p, \quad z = ny + q.$$

La condition où elle est de rencontrer les trois directrices fournira trois relations (176) entre les indéterminées m, n, p, q, et les constantes α, h, h', savoir :

$$\frac{q}{n} = \frac{\alpha p}{m}, \quad h = q, \quad h' = p.$$

Éliminant m, n, p, q, des cinq équations simultanées pré-

cédentes, on trouve

$$\frac{hy}{z-h} = \frac{\alpha h' x}{z-h'},$$

ou

$$hzy - \alpha h' zx - hh' y + \alpha hh' x = 0.$$

C'est l'équation de la surface considérée, qui, comme on voit, est du second degré.

222. On peut aisément démontrer que cette surface n'a pas de centre. Si elle en avait un, en y transportant l'origine on ferait disparaître les termes du premier degré en x, y, z. Pour cela il faudrait substituer dans l'équation

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Écrivant seulement les termes du premier degré, on aurait

$$h(bz' + cy') - \alpha h'(az' + cz') - hh'y' + \alpha hh' x',$$

ou

$$(bh - \alpha ah')z' + (ch - hh')y' - (\alpha ch' - \alpha hh')x'.$$

Or, pour que ces termes disparussent, il faudrait qu'on pût avoir à la fois

$$c - h' = 0 \quad \text{et} \quad c - h = 0,$$

ce qui est impossible, puisque h diffère nécessairement de h'.

La surface du second degré dont il s'agit, n'ayant pas de centre et donnant des hyperboles pour sections par des plans parallèles à ceux des xz et des yz, ne peut être qu'un *paraboloïde hyperbolique*.

223. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont utiles dans les applications de la Géométrie descriptive. Ils portent la dénomination commune *surfaces réglées* du second degré, et jouissent toutes deux

d'une propriété remarquable : *c'est de pouvoir être engendrées de deux manières différentes par une ligne droite mobile qui s'appuie sur trois lignes fixes.*

En effet, soient D, D′, D″, les trois directrices primitives. Si M est un point de la surface, c'est qu'il se trouve sur une génératrice G rencontrant D, D′, D″. Soient G′, G″, deux autres génératrices satisfaisant à la même condition. Il est impossible que deux des trois droites G, G′, G″ soient dans un même plan, car ce plan contiendrait aussi au moins deux des directrices. Cela posé, si l'on imagine qu'une droite mobile glisse sur les trois droites G, G′, G″, elle engendrera une surface réglée du second degré. Or cette droite mobile ayant dans chacune de ses positions trois points communs avec la surface primitive y sera contenue tout entière (187, 3°) : donc les deux surfaces coïncideront.

Suivant que les droites D, D′, D″, seront ou ne seront pas parallèles à un même plan, il en sera de même des génératrices G, G′, G″. D'où l'on conclut facilement que *le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite mobile qui s'appuie sur deux droites fixes en restant constamment parallèle à un même plan.*

224. Théorème. *Si deux surfaces du second degré se rencontrent suivant une ligne plane et qu'elles se coupent encore suivant une autre ligne, cette seconde intersection est également plane.*

Prenons le plan de la première ligne commune pour celui des xy, et supposons que l'équation de l'une des surfaces soit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz \\ \quad +Cx+C'y+C''z+D=0. \end{array}\right.$$

L'équation de la ligne commune s'obtiendra en faisant

$z = 0$ et sera

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0.$$

Il faut qu'en faisant $z = 0$ dans l'équation de la seconde surface on obtienne une équation équivalente à celle-ci, et dont les coefficients soient par conséquent les mêmes, sauf un facteur constant commun. Donc si l'on supprime ce facteur dans l'équation de la deuxième surface, elle deviendra telle que celle-ci,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + Mz^2 + Bxy + N'xz + N''yz \\ \qquad + Cx + C'y + Pz + D = 0. \end{array} \right.$$

Les coordonnées x, y, z, de tout point commun aux deux surfaces, satisfont à la fois aux équations (1) et (2), et par conséquent aussi à celle qu'on obtient en retranchant l'une de l'autre, savoir :

$$(A''-M)z^2 + (B'-N')xz + (B''-N'')yz + (C''-P)z = 0,$$

ou bien

$$z[(A''-M)z + (B'-N')xz + (B''-N'')yz + (C''-P] = 0.$$

Or pour satisfaire à cette équation il faut de deux choses l'une : ou qu'on ait $z = 0$, c'est-à-dire que les points communs soient dans le plan des xy, ou qu'on ait

$$(A''-M)z + (B'-N')x + (B''-N'')y + C''-P = 0,$$

c'est-à-dire que les points communs soient dans le plan exprimé par cette équation du premier degré. Ce qui démontre la proposition.

Si l'on avait $B' = N'$, $B'' = N''$, $C'' = P$, la seconde courbe se confondrait avec la première.

CHAPITRE III.

NOTIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

§ I. PROBLÈME GÉNÉRAL DES TANGENTES. SOLUTIONS DANS LES CAS OU LA COURBE PEUT ÊTRE EXPRIMÉE PAR UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES, FOCALES, ETC.

225. Soit M (*fig.* 54) un point fixe sur une courbe; soient M′, M″,..., diverses positions d'un second point considéré comme mobile sur la courbe et pouvant s'approcher autant qu'on veut de M sans jamais se confondre avec lui; la *sécante* déterminée par ces deux points distincts prend diverses positions MS′, MS″,..., et s'approche autant qu'on veut d'une position MT qu'elle n'atteint jamais. Cette position *limite* est celle de la *tangente* au point M pour la branche de courbe considérée.

Lorsque l'on dit que *la tangente passe par deux points de la courbe infiniment voisins l'un de l'autre*, ou qu'*elle est le prolongement rectiligne d'un arc infiniment petit*, on exprime d'une manière abrégée les mêmes idées que par la définition précédente; car on fait entendre qu'une droite passant par le point donné M et par un autre *très-voisin* M′, pris également sur la courbe, forme avec la tangente un angle non-seulement *très-petit*, mais qu'on peut rendre *aussi petit qu'on veut* en diminuant suffisamment MM′.

226. La définition ordinaire de la tangente au cercle est en défaut pour beaucoup de courbes; exemples : sinusoïde, cycloïde, spirale. Au contraire, la définition générale (n° 225) s'applique au cercle. En effet, à mesure que l'arc MM′ (*fig.* 55) décroît, l'angle au centre MOM′ devient

aussi petit qu'on veut, et par conséquent l'angle S'MO diffère aussi peu qu'on veut de l'angle droit : donc la tangente en M est la perpendiculaire MT au rayon OM.

227. *Tangente à l'ellipse.* Soient F, F' les foyers (*fig.* 56), et M un point de la courbe. Pour avoir un second point M' de l'ellipse, on porte une longueur arbitraire MN en augmentation du rayon vecteur FM, puis MN' = MN en diminution de l'autre rayon vecteur F'M ; et autour des centres F, F', on décrit les arcs NM', N'M'. Un point quelconque S de la sécante MM' jouit de cette propriété que, si l'on mène SR, SR', parallèles aux cordes M'N, M'N', on a MR = MR' comme MN = MN'. Or à mesure que M'M diminue, les angles M'NM, M'N'M, approchent autant qu'on veut d'être droits ; de même les angles SRM, SR'M : donc la tangente MT est telle, que si d'un de ses points on mène des perpendiculaires TV, TV' aux rayons vecteurs FM, F'M, les distances MV, MV' sont égales ; donc MT est bissectrice de l'angle VMF' ; donc

$$\text{angle TMF'} = \text{angle T'MF}.$$

On arrive au même résultat de la manière suivante, par l'emploi des *infiniment petits*, qui, dans un langage abrégé, sous-entend les idées intermédiaires ci-dessus exprimées. Pour obtenir un point M_1 de l'ellipse infiniment voisin du point donné M, il faut augmenter l'un des rayons vecteurs d'une longueur infiniment petite MN_1, et diminuer l'autre d'une quantité égale MN'_1 ; puis décrire deux arcs N_1M_1, N'_1M_1, des centres F, F'. Ces arcs, infiniment petits, se confondent avec deux droites perpendiculaires en N_1 et N'_1 sur MV et MF' ; donc la diagonale infiniment petite MM_1 dont le prolongement rectiligne est la tangente divise l'angle VMF' en deux parties égales.

228. *Tangente à l'hyperbole.* Solution analogue

(*fig.* 57). On prend MN′ = MN; SR, SR′, étant parallèles aux cordes M′N, M′N′, on a MR = MR′; donc si TV, TV′, sont perpendiculaires en V, V′, on a MV = MV′; donc la tangente MT est la bissectrice VMV′; donc

$$\text{angle TMV} = \text{angle TMV}'.$$

229. *Tangente à la parabole.* On prend (*fig.* 58) MN′ = MN; on décrit l'arc NM′ du centre F; on trace N′M′ parallèle à la directrice AB; par le point S de la sécante MM′ on mène SR, SR′, parallèles à M′N, M′N′, et l'on a MR = MR′; l'angle SRM approche autant qu'on veut d'être droit, SR′M l'est toujours; donc si MT est tangente, et que TV, TV′, soient perpendiculaires en V et V′, on a MV = MV′; donc MT est bissectrice de l'angle QMF. Le triangle MFT′ est isocèle : on a donc

$$\text{T}'\text{F} = \text{MF} = \text{QM} = \text{AP}.$$

Le sommet O est le milieu de AF. Donc

$$\text{T}'\text{F} - \text{OF} = \text{AP} - \text{AO}, \quad \text{T}'\text{O} = \text{OP};$$

la *sous-tangente* T′P égale donc le double de l'*abscisse* OP.

Les propriétés ci-dessus démontrées sont applicables aux miroirs elliptiques, hyperboliques, paraboliques.

230. *Tangente à une courbe quelconque du second degré dont on a le foyer* F, *la directrice* AB (133) *et le point de contact* M (*fig.* 59).

La marche du raisonnement est la même que précédemment. La seule différence est que, au lieu de QM = MF, MN′ = MN, etc., ces quantités offrent un rapport constant (133) :

$$m = \frac{\text{QM}}{\text{MF}} = \frac{\text{MN}'}{\text{MN}} = \frac{\text{MR}'}{\text{MR}} = \frac{\text{MV}'}{\text{MV}}.$$

Donc, pour avoir un point T de la tangente, il faut sur FM

et QM prendre des distances MV, MV′, proportionnelles à FM et QM, et élever en V et V′ les perpendiculaires VT, V′T. Il suffit de mener FT″ perpendiculaire à FM; le point T″ de rencontre avec la directrice est sur la tangente.

231. *Tangente à la courbe telle, que les rayons vecteurs* FM, F′M, *sont dans un rapport constant.*

On a vu (112) que cette courbe est un cercle. On trouve par la même méthode que les perpendiculaires FT′, F′T′ (*fig.* 60), aux rayons vecteurs se coupent en un point de la tangente.

232. *Tangente à la spirale d'Archimède* (158).

Soit M (*fig.* 61) le point de contact donné, M′ un point voisin sur la spirale, PMN un arc de cercle ayant O pour centre, OP la direction initiale du rayon vecteur. Par la définition de la courbe on a OM′ et OM proportionnels aux angles M′OP et MOP, et par conséquent à PN et PM; d'où

$$M'N : \text{arc } MN :: OM : \text{arc } PM.$$

Soit α ce dernier rapport indépendant de la distance M′N. A mesure que M′ se rapproche de M, l'angle MNM′ approche d'être droit; l'arc MN approche d'être égal à sa corde; donc le rapport α approche d'être la tangente trigonométrique de l'angle M′MN des deux sécantes MS, MR. Mais ces deux sécantes approchent en même temps des tangentes, l'une MT à la spirale; l'autre MU au cercle PMN. Donc α est la tangente trigonométrique de l'angle TMU.

Si OT′ est perpendiculaire sur OM, on a

$$\frac{OM}{OT'} = \text{tang}\, UMT = \alpha; \quad \text{mais} \quad \alpha = \frac{OM}{\text{arc}\, PM};$$

donc OT′ qu'on appelle *sous-tangente*, est égale à l'arc PM.

233. *Tangente à la cycloïde* (157). Soit M (*fig.* 62) le point de contact donné; M′ un point voisin sur la courbe;

O, O′, les positions correspondantes du centre du cercle générateur. Si l'on mène M′N parallèle à AL, on a (157)

$$AL = \text{arc}\,LM, \quad AL' = \text{arc}\,L'M' = \text{arc}\,LN,$$

d'où

$$AL' - AL \quad \text{ou} \quad LL' = \text{arc}\,MN.$$

Or on a

$$LL' = OO' = NM';$$

donc

$$NM' = \text{arc}\,MN.$$

A mesure que M′ et N se rapprochent de M, la corde MN approche : 1° d'être égale à l'arc MN, et par conséquent à NM′; 2° d'être perpendiculaire à MO.

En supposant que cette double propriété ait effectivement lieu, le triangle isocèle MNM′ sera semblable au triangle isocèle MOL, les angles N et O ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; donc les angles NMM′, OML, sont égaux. Donc (en ajoutant M′MO)

$$NMO = M'ML = 1 \text{ droit};$$

d'où l'on conclut que la tangente en M est perpendiculaire à la droite ML.

On arrive à la même conclusion en remplaçant le cercle générateur par un polygone inscrit dont les côtés décroissent indéfiniment. La même considération s'applique aux tangentes des développantes.

§ II. DÉTERMINATION DE LA TANGENTE D'APRÈS L'ÉQUATION DE LA COURBE.

234. Prenons d'abord un exemple et cherchons la tangente à la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{x^3}{a^2}.$$

Le point de contact M (*fig.* 63) donné sur la courbe ayant pour coordonnées $OP = x$, $PM = y$, soient $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, les coordonnées du point M′, voisin de M, aussi sur la courbe; de sorte que Δx et Δy sont les accroissements PP′, QM′, que prennent simultanément les coordonnées x et y quand on passe du point M au point M′.

Le rapport

$$\frac{M'Q}{MQ} = \frac{M'Q}{PP'} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donnera l'*inclinaison* de la sécante MM′ sur l'axe des x si les coordonnées sont rectangulaires. Il se déduit de l'équation de la courbe, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, du point M′,

$$y + \Delta y = \frac{(x + \Delta x)^3}{a^2} = \frac{1}{a^2}(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3);$$

retranchant $y = \frac{1}{a^2}x^3$ et divisant par Δx, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{inclinaison de la sécante sur l'axe des } x$$

$$= \frac{3x^2}{a^2} + \frac{3x\Delta x}{a^2} + \frac{\Delta x^2}{a^2}.$$

Cette inclinaison (ou tangente trigonométrique de l'angle M′MQ) dépend, comme cela doit être, de l'abscisse x du point M et de l'accroissement Δx. A mesure que Δx décroît, le premier membre approche autant qu'on veut de $\frac{3x^2}{a^2}$, qui en est par conséquent la limite. C'est ce qu'on voit en assignant à Δx des valeurs décroissantes telles que $\frac{x}{100}$, $\frac{x}{1000}$.... Or cette limite, étant celle de l'inclinaison

de la sécante, est l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x (225) : donc

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{inclinaison de la tangente sur l'axe des } x$$
$$= \frac{3x^2}{a^2}.$$

Cet exemple donne une idée de la méthode à suivre en général pour déterminer la tangente à une courbe d'après l'équation de cette courbe.

235. La notation $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se remplace par $\frac{dy}{dx}$, expression qui peut se considérer sous *trois* aspects différents.

1°. $\frac{dy}{dx}$ peut être considéré comme une simple notation équivalente à celle-ci, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ signifiant *limite du rapport des accroissements simultanés de y et de x à mesure que ces accroissements approchent de zéro*. Sous ce point de vue dy et dx ne sont pas deux quantités : $\frac{dy}{dx}$ en est une ; $\frac{dx}{dy}$ est son inverse, c'est-à-dire $\lim \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

2°. On peut considérer dx et dy comme des accroissements qu'il faut donner à x et y pour passer du point M de la courbe à un autre point N de la tangente en M. Dans ce cas, dy et dx sont deux quantités liées l'une à l'autre par un rapport déterminé ; mais elles sont d'ailleurs arbitraires. On peut alors écrire indifféremment, dans l'exemple du n° 234,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{3x^2}{a^2}dx, \quad \text{ou} \quad a^2dy = 3x^2dx.$$

Sous ce second point de vue on peut faire $\Delta x = dx$, et les trois quantités dx, Δy, dy, seront les accroissements

simultanés de l'abscisse, de l'ordonnée de la courbe, de l'ordonnée de la tangente. Ainsi par exemple on aura (*fig.* 63) en même temps

$$PP' = dx, \quad M'Q = \Delta y, \quad NQ = dy.$$

Les deux rapports $\frac{\Delta y}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, dont le second est la limite du premier, ont donc une différence qui décroît autant qu'on veut à mesure que dx diminue. Ainsi on peut poser

$$\frac{\Delta y}{dx} = \frac{dy}{dx} + \alpha,$$

α quantité dépendante de dx et devenant aussi petite qu'on veut à mesure que dx diminue. Il en résulte qu'à mesure que les quantités Δy, dy, décroissent par suite de la diminution de dx, le rapport de Δy à dy approche autant qu'on veut de l'unité ; car l'équation ci-dessus donne

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \alpha \frac{dx}{dy}.$$

3°. Le troisième mode de considérer dy et dx est une conséquence des observations précédentes. On peut assigner à dx un tel degré de petitesse, que dy puisse, sans crainte d'erreur dans les applications ou les conséquences qu'on en tirera, être pris pour Δy ou réciproquement. A ce degré de petitesse et au-dessous, les accroissements dx et dy sont dits *infiniment petits*, et dy peut alors être considéré indifféremment, et selon le besoin de la recherche dont on s'occupe, comme l'accroissement de l'ordonnée de la courbe ou de l'ordonnée de la tangente. Considérés sous ce dernier point de vue, les accroissements simultanés dx et dy s'appellent les *différentielles* des variables x et y.

236. Lorsque deux quantités variables sont tellement liées que, une valeur quelconque de l'une d'elles étant

donnée, on peut en conclure la valeur correspondante de l'autre, on dit que chacune des variables est *fonction* de l'autre.

Si y est exprimé immédiatement au moyen de x, comme dans $y=ax$, $y=\frac{a}{x}$, $y=x^a$, $y=A^x$, $y=a\log x$, $y=a\sin x$, on dit que y est une fonction *explicite* de x, et l'on se sert des notations $y=\mathrm{f}(x)$, $y=\mathrm{F}(x)$, etc.

Si l'on donne seulement une relation entre y et x, par exemple une équation à laquelle les deux variables doivent satisfaire, la fonction qui n'est pas exprimée immédiatement au moyen de l'autre variable est dite *implicite*.

Exemple : $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Une relation de ce genre s'écrit ainsi en général :

$$\mathrm{f}(x,y)=0,\quad \mathrm{F}(x,y)=0.$$

Dans les autres exemples ci-dessus, x est fonction implicite de y. Une fonction implicite devient explicite par la résolution de l'équation. Par exemple on tire des équations précédentes

$$x=\frac{y}{a},\quad x=\frac{a}{y},\quad x=y^{\frac{1}{a}},\quad x=\frac{\log y}{\log A},\quad x=10^{\frac{y}{a}},$$

$$x=\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{y}{a}\right),\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

ou

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

237. Toute fonction peut être représentée par une courbe, ce qui fait pressentir l'utilité très-étendue de la recherche des tangentes aux courbes comme moyen de reconnaître comment une fonction varie dans le voisinage

d'une de ses valeurs particulières. En général y étant une fonction de x désignée par F (x), la quantité $\frac{dy}{dx}$ en est une autre qu'on désigne par $F'(x)$, et qu'on appelle la *dérivée* de F (x). Le produit $F'(x)\,dx$ s'appelle la *différentielle* de F (x). La recherche du coefficient d'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ des courbes ou de la dérivée d'une fonction quelconque est le premier objet du *calcul différentiel* et a des applications importantes dans la mécanique.

238. Quand deux variables y et x sont liées l'une à l'autre, on peut avoir à considérer tantôt la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x, tantôt la dérivée $\frac{dx}{dy}$ de x par rapport à y. Or il est clair que ces deux quantités sont inverses l'une de l'autre, car la relation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1$$

subsiste pendant que les deux facteurs de ce produit approchent de leurs limites par le décroissement simultané de Δx et de Δy.

Ainsi

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1.$$

§ III. DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS FONDAMENTALES x^m, $\frac{1}{x}$, $\log x$, $\sin x$.

239. Soit $y = x^m$, l'exposant m étant entier.

Dans cette équation et dans celles des numéros suivants, x et y sont des nombres et représentent les coordonnées d'une courbe moyennant le choix d'une ligne prise pour

unité. Les diverses courbes qu'on obtiendrait en faisant varier cette unité seraient semblables.

On a par la formule de Newton

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\,\Delta x + k\,\Delta x^2.$$

k est un polynôme, dont le premier terme est $\frac{m(m-1)}{2}\,x^{m-2}$, et les autres ont Δx pour facteur. Ces deux équations donnent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} = k\,\Delta x,$$

d'où

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Ce résultat s'écrit aussi de cette manière :

$$dx^m = mx^{m-1}\,dx;$$

c'est-à-dire que *La différentielle d'une puissance de x s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité, et en multipliant par l'exposant primitif et par la différentielle de x.*

240. Soit $y = \frac{1}{x}$.

On a donc

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

d'où

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\,\Delta x}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\,\Delta x};$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc

$$d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Les différentielles sont de signes contraires, parce que y diminue lorsque x croît.

241. Soit $y = \log x$.

On a donc

$$x + \Delta y = \log\,(x + \Delta x),$$

d'où

$$\Delta y = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right),$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

On peut supposer que Δx en décroissant soit toujours une partie aliquote de plus en plus petite de x. Soit donc $\Delta x = \frac{x}{m}$: le dénominateur m est dans cette hypothèse un nombre entier qui croît indéfiniment. On a, en remplaçant dans le second nombre Δx par $\frac{x}{m}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lim\left[\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right],$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log\left[\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right],$$

en remarquant que ces limites sont prises pour m croissant indéfiniment.

242. On a deux moyens de déterminer la limite de $\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ et par conséquent de constater son existence.

(Il est à remarquer que, dans l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, bien que $\frac{1}{m}$ devienne infiniment petit, on ne peut pas le négliger auprès de 1, parce que l'exposant m de la puissance devient infiniment grand.)

1°. Donner à m une grande valeur, et chercher dans les tables, pour cette valeur, celle de $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ou de $m[\log(m+1)-\log m]$; par exemple pour $m=1000$ cette formule donne 0,434, et il est aisé de vérifier que pour tout nombre m plus grand on obtient les trois mêmes premiers chiffres fractionnaires. Ainsi, à moins de 0,001 près on a

$$\frac{dy}{dx}, \text{ c'est-à-dire } \frac{d\log x}{dx}=0{,}434\,\frac{1}{x}.$$

2°. On peut trouver directement la limite dont s'approche sans cesse la quantité $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ à mesure que le nombre entier m augmente. La formule de Newton, poussée au delà du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, donne

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{m^2}+\dots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{1.\;2.\;3\dots n}\,\frac{1}{m^n}\left(1+\frac{m-n}{n+1}\,\frac{1}{m}+\frac{(m-n)[m-(n+1)]}{(n+1)(n+2)}\,\frac{1}{m^2}\dots\right)$$

ou bien

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{2}+\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{2.\;3\dots n}\left\{1+\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)\quad(n+2)}\dots\right\}.$$

La limite de la somme des $n+1$ premiers termes à mesure

que m augmente est évidemment :

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{2.3.4\ldots n}$$

et l'on peut écrire

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2.3.4\ldots n}+\frac{1}{2.3.4\ldots n}\lim\left\{\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)\quad(n+2)}\ldots\right\}.$$

Or on voit aisément que la quantité renfermée dans la dernière parenthèse est plus petite que la somme de la progression décroissante

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\ldots,$$

laquelle a pour limite $\frac{1}{n}$. Donc on a

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}+\text{une quantité}<\frac{1}{n}\frac{1}{2.3.4\ldots n}.$$

De la possibilité de calculer la limite cherchée au degré d'approximation qu'on voudra. Elle se désigne souvent par la lettre e, et l'on trouve

$$e=2,7182818\ldots\ldots;$$

son logarithme est

$$\log e=0,4342945.$$

On a souvent besoin de l'inverse de ce logarithme :

$$\frac{1}{\log e}=2,302585.$$

Il résulte de ce qui précède qu'on a

$$\frac{d\log x}{dx}=\log e\frac{1}{x}$$

ou

$$d \log x = \log e \frac{dx}{x}$$

et

$$\log e = 0,43429.$$

243. Soit $y = \sin x$.

On a

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

ou, en remplaçant cette différence par un produit (59),

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Pour déterminer la limite de ce rapport, il faut être bien fixé sur la signification qu'on attribue à la variable x. Il ne suffit pas de dire que c'est un angle; il faut encore savoir quelle est l'unité à laquelle cet angle est rapporté. Or l'usage constant en analyse est de mesurer un angle par un arc compris entre ses côtés et ayant son sommet pour centre, et d'exprimer cet arc non en degrés ni par sa longueur, mais par le rapport de cette longueur à celle du rayon qui par conséquent est arbitraire, et disparaît. Si donc on suppose ce rayon pris pour unité de longueur, la longueur de l'arc exprime l'angle, de même que la moitié de la corde qui sous-tend un arc double exprime le sinus. Cela posé, la quantité $\frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$, rapport d'une corde à l'arc infiniment petit qu'elle sous-tend, a sa limite égale à 1.

D'une autre part, la limite de $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ est $\cos x$;

donc

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

ou

$$d \sin x = \cos x . dx.$$

§ IV. THÉORÈMES ET RÈGLES POUR DIFFÉRENTIER TOUTES LES FONCTIONS A L'AIDE DES DIFFÉRENTIELLES FONDAMENTALES.

244. *Différentiation des fonctions de fonction.* Expliquons cette locution par un exemple. Soit

$$y = (\log x)^m.$$

Pour obtenir y quand on connaît x, il faut d'abord calculer $\log x$, fonction fondamentale de x, puis élever $\log x$ à la puissance m, c'est-à-dire considérer y comme une fonction fondamentale de $\log x$.

Soit en général

$$y = F(u) \quad \text{et} \quad u = f(x),$$

ce qu'on indique aussi par la notation

$$y = F[f(x)].$$

y est une fonction, fondamentale ou autre, désignée par F, d'une fonction indiquée par f de la variable indépendante x.

Pour différentier y relativement à cette variable x, supposons que celle-ci prenne un accroissement Δx auquel correspondent pour u et y les accroissements Δu et Δy. On a entre ces trois quantités la relation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Or, à mesure que Δx décroît, Δu et Δy approchent aussi

de zéro; et les trois rapports approchent simultanément de leurs limites respectives $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$, l'équation subsistant toujours. On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

c'est-à-dire, d'après la notation convenue au n° 237,

$$\frac{dy}{dx} = F'(u) \cdot f'(x)$$

ou

$$dy = F'[f(x)] \cdot f'(x)\, dx,$$

ou encore

$$dy = F'(u) \cdot du.$$

De là la règle suivante :

Théorème. *Pour différentier une fonction de fonction, il faut prendre la dérivée de la fonction principale par rapport à la fonction subordonnée considérée comme une simple variable et multiplier le résultat par la différentielle de la fonction subordonnée.*

Exemples.

1°. $d(\log x)^m = m(\log x)^{m-1} d\log x$
$$= m \log e \, (\log x)^{m-1} \frac{dx}{x}.$$

2°. $d\frac{1}{\sin x} = -\frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x}{\sin x} dx.$

3°. $d\sin x^m = \cos x^m \, dx^m = m x^{m-1} \cos x^m \, dx.$

Remarque. Si la relation entre y et x était établie par deux équations de la forme

$$y = F(u) \quad \text{et} \quad x = f(u),$$

on démontrerait aussi facilement l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}=\frac{F'(u)}{f'(u)}.$$

245. La fonction subordonnée $f(x)$ dans $F[f(x)]$ peut être elle-même une fonction de fonction.

Soient trois fonctions superposées au lieu de deux,

$$y=F(u),\quad u=\Phi(v),\quad \text{et}\quad v=\Psi(x),$$

les notations F, Φ et Ψ indiquant des formes de fonctions quelconques. On a, d'après le théorème précédent,

$$du=\Phi'(v)\,dv \quad \text{et} \quad dy=F'(u)\,du,$$

d'où

$$dy=F'(u)\,\Phi'(v)\,dv,$$

formule dans laquelle dv signifie $\Psi'(x)\,dx$, et dy est la dérivée $\frac{dy}{dx}$ multipliée par dx.

On peut aussi exactement et plus facilement écrire $dy=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot dv$, pourvu qu'on se rappelle que $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dv}$ sont les dérivées de y et de u prises respectivement par rapport à u et à v, et que les différentielles dy et dv sont prises relativement à une même variable indépendante.

Exemple:
$$\begin{aligned} d\sin^4 x^2 &= 4\sin^3 x^2 .\, d\sin x^2 \\ &= 4\sin^3 x^2 .\, \cos x^2\, d(x^2) \\ &= 8x\sin^3 x^2 \cos x^2\, dx. \end{aligned}$$

246. *Des fonctions composées.* Si, ayant plusieurs fonctions d'une variable x, on les combine ensemble par des opérations quelconques, on forme une fonction composée.

Exemple : $$y = \frac{x^m \sin^2 x}{1 - \log x}:$$

la formation de y exige préalablement celle de fonctions moins compliquées x^m, $\sin^2 x$, $\log x$.

Occupons-nous d'abord des cas les plus simples.

247. *Différentielle d'une somme.* Soit

$$y = u + v + \ldots,$$

$u, v, \ldots,$ étant des fonctions quelconques de x. On aura évidemment entre les accroissements simultanés de ces quantités, l'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots,$$

par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \ldots,$$

ou

$$dy = du + dv + \ldots,$$

Théorème. *La différentielle d'une somme de plusieurs fonctions est la somme des différentielles de ces fonctions.*

248. *Remarques.* 1°. Si l'un des termes de la somme était une constante, ce terme disparaîtrait évidemment dans la différentiation. C'est ce qu'on exprime quelquefois en disant que *la différentielle d'une constante est nulle.*

2°. Si l'un des termes est simplement la variable indépendante x, la différentielle de ce terme est dx et sa dérivée est 1.

249. Théorème. *La différentielle du produit d'une fonction par un coefficient constant est égale à la différentielle de la fonction affectée du même coefficient.*

Cette proposition, qui pourrait être considérée comme

corollaire de la précédente, se démontre très-aisément à priori. Soit

$$y = a\,\mathrm{F}(x).$$

On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,\frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \lim \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x} = a\mathrm{F}'(x),$$

ou

$$\mathrm{d}y = a\,\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques. 1°. Le coefficient a peut être négatif :

$$\mathrm{d}[-a\mathrm{F}(x)] = -a\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2°. Il peut être égal à -1,

$$\mathrm{d}[-\mathrm{F}(x)] = -\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

250. *Différentielle du produit de deux fonctions.* Soient

$$y = uv, \quad u = \mathrm{F}(x) \quad \text{et} \quad v = \mathrm{f}(x).$$

Soient les accroissements finis simultanés Δx, Δv, Δu et Δy. On a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Or, à mesure que Δx décroît les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, approchent de leurs limites $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ ou $\mathrm{f}'(x)$, et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ou $\mathrm{F}'(x)$, tandis que le produit $\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x$ approche de zéro. Donc

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

ou plus simplement

$$duv = udv + vdu,$$

étant bien entendu que la différentielle d'une fonction n'est pas autre chose que la dérivée de cette fonction multipliée par la différentielle de la variable indépendante.

Ce résultat général s'énonce ainsi :

THÉORÈME. *La différentielle d'un produit est égale à la somme des résultats qu'on obtient par la différentiation faite en considérant successivement chaque facteur comme variable et l'autre comme constant.*

REMARQUE. Ce théorème s'étend à un nombre quelconque de facteurs. Le produit uvz étant considéré comme $(uv)z$, on a

$$duvz = uvdz + zduv;$$

or

$$duv = udv + vdu,$$

donc

$$duvz = uvdz + uzdv + vzdu.$$

La règle à suivre en général est manifeste.

251. Le même théorème s'applique à un quotient, car on peut mettre celui-ci sous la forme d'un produit et se servir de la formule du n° 240.

$$\frac{u}{v} = u\frac{1}{v},$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{1}{v}du + ud\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

252. *Règle générale de la différentiation des fonctions composées.* Les théorèmes précédents suffisent à tous les besoins des applications du calcul différentiel. Cependant nous ne croyons pas devoir passer sous silence une propo-

sition très-générale et très-remarquable qu'on trouve dans les traités spéciaux sur cette matière.

Soit $y = F(u, v)$, c'est-à-dire la fonction F de u et de v, les quantités u et v étant elles-mêmes des fonctions d'une variable indépendante x.

Pour arriver à la dérivée $\frac{dy}{dx}$, donnons à x un accroissement fini Δx; les fonctions u, v et y prennent en conséquence les accroissements simultanés Δu, Δv et Δy, et l'on a

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v).$$

Pour nous rendre compte de la loi suivie par cette différence quand Δx diminue dans $u + \Delta u$ et dans $v + \Delta v$, supposons qu'au lieu de faire croître simultanément u et v dans la fonction composée y, on commence par accroître seulement l'une des deux fonctions composantes u, et qu'on forme ainsi $F(u + \Delta u, v)$.

Cette quantité s'introduit naturellement dans l'expression de Δy qui prend la forme

$$\begin{aligned}\Delta y &= F(u + \Delta u, v) - F(u, v)\\ &\quad + F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v);\end{aligned}$$

par conséquent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\\ &\quad + \frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}\right.$$

Passons aux limites vers lesquelles tendent ces quantités, à mesure que les accroissements Δx, Δu, Δv et Δy approchent de zéro. Les limites de $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sont les dérivées désignées, suivant la notation convenue, par $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$.

La limite du rapport

$$\frac{F(u+\Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u}$$

est la dérivée par rapport à u de la fonction $F(u, v)$ dans laquelle on ne ferait varier que u, en considérant v comme une constante. C'est ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de $F(u, v)$ ou de y par rapport à u. On la désigne par $F'_u(u, v)$, ou plus simplement par $\frac{dy}{du}$, en ayant soin de se rappeler que, si l'on considère le numérateur dy comme un accroissement infiniment petit de y, il répond à la variation infiniment petite de u seulement, et non aux variations simultanées de u et de v.

Enfin remarquons que, dans le rapport

$$\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u+\Delta u, v)}{\Delta v},$$

le numérateur est l'accroissement que prend $F(u+\Delta u, v)$ quand on fait croître v de Δv. Par conséquent, si l'on fait varier Δv seul et approcher de zéro, on aura pour limite de la fraction dans cette hypothèse, la dérivée par rapport à v de la fonction $F(u+\Delta u, v)$, et pour avoir ensuite la limite dont s'approche la fraction quand Δu et Δv diminuent tous les deux, il ne reste plus qu'à faire $\Delta u = 0$ dans $F'_v(u+\Delta u, v)$, ce qui donne $F'_v(u, v)$, ou $\frac{dy}{dv}$, dérivée partielle de $F(u, v)$ ou de y par rapport à v.

En égalant les limites des deux membres de l'équation (1), on obtient la dérivée totale de y, savoir :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

ou, ce qui a au fond la même signification,

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du + \frac{dy}{dv} \cdot dv,$$

formule dans laquelle il faut bien remarquer cette anomalie peu conforme à la rigueur du langage algébrique, que la notation dy a trois significations différentes, puisqu'elle désigne dans le premier membre une différentielle totale, et dans le second des différentielles partielles. Mais les dénominateurs du et dv du second membre empêchent toute confusion.

La formule précédente, facilement étendue à un nombre quelconque de fonctions composantes, s'énonce ainsi :

Théorème. *La différentielle d'une fonction composée est égale à la somme des résultats qu'on obtient en considérant successivement chaque fonction composante comme variable et les autres comme constantes.*

Les règles des nos 247 et 250 sont des cas particuliers de celle-ci.

Exemple. Revenant à l'exemple cité au no 246, on trouve sans difficulté la différentielle de $\frac{x^m \sin^2 x}{1 - \log x}$ qu'on met préalablement sous la forme $\frac{uv}{z}$. On a (nos 249 et 250)

$$d\frac{uv}{z} = \frac{zv\,du + zu\,dv - uv\,dz}{z^2}.$$

Ensuite, de

$$u = x^m, \quad v = \sin^2 x \quad \text{et} \quad z = 1 - \log x,$$

on tire

$$du = mx^{m-1}, \quad dv = 2\sin x \cos x\, dx = \sin 2x\, dx,$$

et

$$dz = -\frac{\log e}{x} dx.$$

Il ne reste plus qu'à substituer.

253. *Différentiation des fonctions implicites.* Deux quantités variables sont fonctions implicites l'une de l'autre, lorsqu'elles sont liées par une équation indiquant entre ces quantités des opérations déterminées.

Exemples : 1°. $\log y = \sin x$;

2°. $y^3 = axy + x^3$.

Dans chaque cas y est en réalité une fonction de x, quoique non exprimée explicitement. Chaque membre est donc, ou fonction immédiate de x, comme $\sin x$, ou fonction de fonction de x, comme $\log y$ ou y^3, ou fonction de plusieurs fonctions de x, comme $axy + x^3$. Or, quand deux fonctions d'une même variable sont égales, quoique différemment exprimées, leurs dérivées et leurs différentielles, par rapport à cette variable, sont nécessairement égales.

De là le moyen de déduire d'une équation, comme celles ci-dessus, l'expression en x et y de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou de son inverse.

1°. De $\log y = \sin x$ on conclut

$$\frac{\log e\, dy}{y} = \cos x\, dx.$$

2°. De $y^3 = axy + x^3$

$$3y^2\, dy = ax\, dy + ay\, dx + 3x^2\, dx.$$

De chacune de ces équations différentielles, on tire soit $\frac{dy}{dx}$ soit $\frac{dx}{dy}$, en opérant comme si dy et dx étaient des quantités finies.

Théorème. *En général on tire d'une équation en x, y, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ou de $\frac{dx}{dy}$ en différentiant les deux membres suivant les règles des fonctions de fonctions.*

Si la relation de x avec y était implicitement exprimée par deux équations entre ces deux quantités et une troisième variable z, comme

$$F(x, y, z) = 0 \text{ et } f(x, y, z) = 0,$$

pour trouver $\frac{dy}{dx}$ il suffirait de différentier ces équations par rapport à la variable x suivant la règle du n° 252. On aurait, en désignant simplement par F et f les deux fonctions ci-dessus,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

et

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

d'où en éliminant $\frac{dz}{dx}$ on conclurait $\frac{dy}{dx}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, etc., qui elles-mêmes sont des fonctions de x, y et z.

§ V. FORMULES DE DIFFÉRENTIELLES OBTENUES PAR LES RÈGLES PRÉCÉDENTES.

254. Parmi toutes les formes possibles de fonctions, il en est un certain nombre très-limité auxquelles les autres se ramènent. Elles sont nommées *fonctions simples*, et on les partage en deux groupes, savoir, en désignant par m un nombre quelconque positif ou négatif, et par a un nombre positif quelconque :

1°. x^m, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\text{tang}\, x$, $\cot x$, $\text{séc}\, x$ et $\text{coséc}\, x$;

2°. $\log x$, $\text{arc} \sin x$, $\text{arc} \cos x$, $\text{arc tang}\, x$, $\text{arc} \cot x$, $\text{arc séc}\, x$, $\text{arc coséc}\, x$.

A l'exception de x^m, les fonctions d'un de ces groupes

sont dites *inverses* de celles de l'autre groupe, parce que, en général, si d'une équation $y = F(x)$ on tire $x = \Phi(y)$, on dit que les deux formes de fonction F et Φ sont inverses l'une de l'autre. Ainsi de $y = a^x$ on conclut $x = \frac{\log y}{\log a}$; donc la forme $\log y$ est, sauf un facteur constant, inverse de la forme a^x. De même si l'on a $y = \sin x$ on en conclut que x est l'arc dont le sinus est y, ce qu'on écrit de cette manière $x = \text{arc}(\sin = y)$ ou plus brièvement $x = \text{arc}\sin y$. La fonction inverse de x^m serait $y^{\frac{1}{m}}$ et par conséquent de même forme, attendu que m peut être fractionnaire.

Différentielles des fonctions simples.

255. $y = x^m$. On a différentié cette fonction (239) en supposant m entier et positif. Pour ramener dans tous les cas la différentation de x^m à celle d'une des fonctions fondamentales, on transforme la relation donnée en une autre équivalente, et l'on applique le théorème du n° 253,

$$y = x^m \quad \text{équivaut à} \quad \log y = m \log x,$$

d'où

$$\frac{\log e\, dy}{y} = m \frac{\log e\, dx}{x};$$

donc

$$dy = m \frac{y\, dx}{x}$$

ou

$$[dx^m = m x^{m-1}\, dx] \; (*).$$

(*) Nous mettons ainsi dans des crochets [ ] les formules qu'il importe de connaître pour s'en servir au besoin dans les applications. Dans ces formules x est, suivant les cas, la variable indépendante ou une fonction de cette variable.

Cas particuliers. 1°. $m = \frac{1}{2}$.

$$\left[d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\right].$$

2°. $m = -1$.

$$\left[d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}\right].$$

256. $y = a^x$ (a nombre positif quelconque);

$$\log y = x \log a,$$

d'où

$$\frac{\log e\, dy}{y} = \log a\, dx;$$

donc

$$\left[da^x = \frac{\log a}{\log e} a^x\, dx\right].$$

257. $y = \sin x$ ou $x = \text{arc}\sin y$.

On sait (243) qu'on a

$$dy = \cos x\, dx,$$

c'est-à-dire

$$[d\sin x = \cos x\, dx];$$

donc

$$dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

donc (**)

$$\left[d\,\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right].$$

258. $y = \cos x$ ou $x = \text{arc}\cos y$.

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

(**) Nous annonçons ainsi une formule qui se tire de l'équation précédente en remplaçant x par y et y par x.

d'où

$$dy = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x\, dx\,;$$

donc

$$\left[d \cos x = -\sin x\, dx\right]$$

et

$$dx = -\frac{dy}{\sin x} = -\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

donc (**)

$$\left[d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right].$$

259. $y = \operatorname{tang} x$ ou $x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} y$.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

d'où

$$dy = \frac{\cos x\, dx}{\cos x} + \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x};$$

$$\left[d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\, dx\right].$$

$$dx = \frac{dy}{1+y^2};$$

donc (**)

$$\left[d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}\right].$$

260. $y = \cot x$ ou $x = \operatorname{arc} \cot y$.

$$y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

donc

$$dy = \frac{-dx}{\sin^2 x},$$

$$\left[d \cot x = \frac{-dx}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)\, dx\right].$$

$$dx = -\frac{dy}{1+y^2};$$

donc (**)

$$\left[d \operatorname{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2}\right].$$

261. $y = \operatorname{séc} x$ ou $x = \operatorname{arc} \operatorname{séc} y$.

$$y = \frac{1}{\cos x};$$

donc

$$dy = \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}.$$

$$\left[d \operatorname{séc} x = \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x \, dx\right].$$

$$dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}};$$

donc (**)

$$\left[d \operatorname{arc} \operatorname{séc} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\right].$$

262. $y = \operatorname{coséc} x$ ou $x = \operatorname{arc} \operatorname{coséc} y$.

$$y = \frac{1}{\sin x};$$

donc

$$dy = \frac{-\cos x \, dx}{\sin^2 x}.$$

$$\left[d \operatorname{coséc} x = -\frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{coséc} x \, dx\right].$$

$$dx = -\frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}};$$

donc (**)

$$\left[d \operatorname{arc} \operatorname{coséc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\right].$$

263. REMARQUES. L'arc dont le sinus est x et celui dont le cosinus est x, ont leurs différentielles égales et de signes

contraires : cela doit être, puisque la somme de ces deux arcs est une constante $\frac{\pi}{2}$. Par la même raison

$$\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,tang}\,x = -\,\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,cot}\,x$$

et

$$\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,s\acute{e}c}\,x = -\,\mathrm{d}\,\mathrm{arc\,cos\acute{e}c}\,x.$$

Exemples de différentiation.

264. I. $y = (a + bx^n)^m$,

ou

$$z = (a + bx^n) \quad \text{et} \quad y = z^m.$$

$$\mathrm{d}y = mz^{m-1}\mathrm{d}z = mz^{m-1}.\,nbx^{n-1}\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}y = mnb\,(a + bx^n)^{m-1}x^{n-1}\mathrm{d}x.$$

II. $y = \log\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$,

ou

$$1 + x^2 = z^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}\log(x + z).$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\log e}{2}\,\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}z}{x + z}, \quad 2x\mathrm{d}x = 2z\mathrm{d}z;$$

d'où, en éliminant $\mathrm{d}z$,

$$\mathrm{d}y = \frac{\log e}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\log e}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

III. $y = u^v$, d'où $\log y = v \log u$.

$$\frac{\log e\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{v \log e\,\mathrm{d}u}{u} + \log u\,\mathrm{d}v;$$

donc

$$\mathrm{d}u^v = vu^{v-1}\mathrm{d}u + u^v\,\frac{\log u}{\log e}\,\mathrm{d}v.$$

IV. $y = \arc\sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Soit

$$1 + x^2 = z^2 \quad \text{et} \quad y = \arc\sin \frac{x}{z}.$$

$$x\,dx = z\,dz \quad \text{et} \quad dy = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{z^2}}}\,d\frac{x}{z};$$

$$dy = z\,d\frac{x}{z} = dx - \frac{x\,dz}{z} = \left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right)dx,$$

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}.$$

§ VI. DES DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DE DIVERS ORDRES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE. EXEMPLES DE LEUR EMPLOI.

265. Lorsque y est une fonction de x exprimée par la notation $y = F(x)$, les règles précédentes font connaître sa *dérivée* par rapport à x, désignée par $F'(x)$.

Cette dérivée est, en général, une fonction de x, et a par conséquent elle-même une dérivée par rapport à cette variable; on la désigne par $F''(x)$ et on l'appelle la *seconde dérivée* de $F(x)$.

Si $F''(x)$ est encore une fonction de x, sa dérivée par rapport à cette même variable se désigne par $F'''(x)$ et s'appelle la *troisième dérivée* de $F(x)$.

En considérant ainsi les *dérivées successives* produites par $F(x)$, on comprend que la notation $F^n(x)$ indique la *dérivée du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* ou *de l'ordre* n de la fonction $F(x)$.

Les dérivées successives d'une fonction ont une autre notation qu'il est bon de connaître.

De même que lorsqu'on pose $y = F(x)$, $F'(x)$ se désigne par $\frac{dy}{dx}$, on pourrait indiquer $F''(x)$ par $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$.

Or on remplace cette notation par celle-ci :

$$\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}x} \text{ ou, plus simplement, } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

qui signifie absolument la même chose.

En général, si l'on a

$$F(x) = y,$$

on a aussi

$$F^n(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

266. Exemples. On trouvera sans difficulté :

$$\frac{\mathrm{d}^n x^m}{\mathrm{d}x^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n},$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \log x}{\mathrm{d}x^n} = 1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{n-1}\frac{\log e}{x^n},$$

$$\frac{\mathrm{d}^n a^x}{\mathrm{d}x^n} = a^x\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^n,$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \sin x}{\mathrm{d}x^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^n \cos x}{\mathrm{d}x^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

267. Nous avons vu (238) qu'en général x et y dépendant l'un de l'autre, on a toujours, comme si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ étaient des quantités finies,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Il ne faudrait pas penser qu'on puisse aussi simplement changer la variable indépendante lorsqu'il s'agit des dérivées des ordres supérieurs.

ainsi la courbe est tangente à la droite dont nous venons de parler. Quant à $F''(x)$, elle est nulle à l'origine, et partout ailleurs elle est de même signe que x. Donc (268) au delà de l'origine la courbe tourne sa concavité dans le sens des y positifs, et en deçà de l'origine elle la tourne en sens contraire.

Le point qui jouit sur une courbe de cette propriété du changement de sens de la concavité s'appelle un POINT D'INFLEXION. Il est caractérisé par la condition que si $y = f(x)$ est l'équation de la courbe rapportée à deux axes, x' étant l'abscisse du point d'inflexion, la seconde dérivée $f''(x)$ est nulle quand on y fait $x = x'$, et a deux signes différents quand on y fait $x > x'$ et $x < x'$.

270. *Maximums et minimums d'une fonction ou de l'ordonnée d'une courbe*. Si pour des valeurs croissantes de la variable ou de l'abscisse, la fonction ou l'ordonnée, après avoir augmenté, diminue; et si, dans cet intervalle, la dérivée ou l'inclinaison, d'abord positive, puis négative, varie d'une manière continue et conséquemment passe par zéro; dans cette double hypothèse, la valeur de la fonction ou de l'ordonnée y qui correspond à $\frac{dy}{dx} = 0$ est dite un *maximum* de cette fonction. Elle serait un *minimum* dans le cas où la fonction d'abord décroissante augmenterait ensuite.

Dans le premier cas, à mesure que la variable x augmente, la dérivée est décroissante avant comme après le *maximum*, et par conséquent la seconde dérivée est négative, ce qui revient à dire que la courbe représentative de la fonction tourne sa concavité (268) dans le sens des y négatifs. Dans le second cas c'est l'inverse qui a lieu. Concluons :

THÉORÈME. *En général un* MAXIMUM *ou un* MINIMUM *d'une fonction répond à une valeur de la variable qui*

rend la dérivée nulle. Il y a maximum si, pour les valeurs de cette variable qui précèdent et qui suivent, la seconde dérivée est négative; il y a minimum si la seconde dérivée est positive.

271. *Exemples.* I. $y = \mathrm{f}(x) = a + mx + \frac{x^2}{b}$.

$$\mathrm{f}'(x) = m + \frac{2x}{b} \quad \text{et} \quad \mathrm{f}''(x) = \frac{2}{b}.$$

$\mathrm{f}'(x) = 0$ a lieu pour

$$x = -\frac{mb}{2};$$

d'où le minimum, si b est positif,

$$y = a - \frac{m^2 b}{4}.$$

La courbe est une parabole.

II. $y = mx(x - a)$.

$$\mathrm{f}'(x) = m(2x - a) \quad \text{et} \quad \mathrm{f}''(x) = 2m.$$

La courbe est encore une parabole. $\mathrm{f}'(x)$ est nulle par $x = \frac{a}{2}$ qui répond à un *minimum* ou à un *maximum* de y, suivant que m est positif ou négatif.

III. $y^2 = mx(a - x)$. Si l'on ne cherche que le maximum de la valeur absolue de y, il suffit de poser

$$\mathrm{f}(x) = x(a - x), \quad \mathrm{f}'(x) = a - 2x, \quad \mathrm{f}''(x) = -2.$$

$$x = \frac{a}{2} \text{ répond à un maximum } y = \frac{a}{2}\sqrt{m}.$$

IV. Soit, en général,

$$y = \mathrm{f}(x).\mathrm{f}(a - x),$$

la lettre f employée ici deux fois, indiquant une même forme de fonction. *Exemple* : $y = \sin x \sin(a - x)$.

Quelle que soit cette forme, un maximum ou un minimum de y répond à $x = a - x$ ou $x = \frac{a}{2}$. On en voit la raison en ce que pour deux valeurs de x également distantes de $\frac{a}{2}$, l'une en plus, l'autre en moins, y prend deux valeurs égales.

La même règle et la même explication ont lieu pour

$$y = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a - x).$$

Si l'on a

$$y = \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{f}\left(\frac{a}{x}\right) \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}\left(\frac{a}{x}\right),$$

un maximum ou un minimum répond à $x = \frac{a}{x}$, c'est-à-dire à $x^2 = a$, parce que y prend deux valeurs égales soit pour $x^2 = ma$, soit pour $x^2 = \frac{a}{m}$, c'est-à-dire pour deux valeurs de x l'une plus grande, l'autre plus petite que $\sqrt{a}$, quel que soit m.

V. Soit

$$y = a + x(x + 1)(x - 2) = a + x^3 - x^2 - 2x.$$

L'ordonnée prend la valeur a en trois points dont les abscisses sont $x = -1$, $x = 0$ et $x = 2$. Si l'on fait $x > 2$, y est $> a$ et croît indéfiniment avec x; si l'on suppose $x < -1$, $y - a$ est négatif et sa valeur absolue croît indéfiniment avec celle de x.

En différentiant on a

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 - 2x - 2,$$

qui devient nulle par

$$x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7}), \text{ soit } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7}) = 1{,}215\ldots, \\ x'' = -\frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1) = -0{,}549\ldots \end{cases}$$

et

$$f''(x) = 6x - 2,$$

quantité qui varie comme l'ordonnée d'une ligne droite.

Si l'on fait $x = x'$, cette seconde dérivée devient $2\sqrt{7}$; elle est donc positive non-seulement par $x = x'$, mais aussi pour les valeurs de x qui diffèrent peu de x' en plus ou en moins. Donc à l'abscisse x' répond un *minimum* de y qui est approximativement

$$a - 2,114.$$

De même, si l'on fait $x = x''$ dans l'expression de la seconde dérivée, elle devient $-2\sqrt{7}$; elle est négative pour les valeurs de x peu différentes de x'' en plus ou en moins. Donc à l'abscisse x'' répond un *maximum* de y qu'on trouve approximativement égal à

$$a + 0,631.$$

La valeur de x qui rend $f''(x)$ nulle, est $x = \frac{1}{3}$. Pour $x > \frac{1}{3}$, $f''(x)$ est positive, et la concavité de la courbe est dans le sens des y positifs. Pour $x < \frac{1}{3}$, $f''(x)$ est négative, et la concavité du côté des y négatifs. Donc à $x = \frac{1}{3}$ répond un point d'inflexion de la courbe.

272. Remarques. I. Il faut se garder de penser que les expressions *maximum* et *minimum* d'une fonction ou de l'ordonnée d'une courbe signifient la valeur la plus grande et la plus petite que puisse prendre cette fonction ou cette ordonnée. L'exemple IV le montre bien, puisque y finit par croître indéfiniment avec x positif et décroît de même quand x décroît, c'est-à-dire devient négatif et prend des valeurs absolues de plus en plus grandes.

II. Une même fonction peut prendre plusieurs *maximums* ou plusieurs *minimums* (*) égaux ou inégaux. *Exemples :* 1°. Pour $y = \sin x$ il y a une infinité de maximums tous égaux à 1, qui répondent à

$$x = (1 + 4n)\frac{\pi}{2},$$

et une infinité de *minimums*, égaux à -1, qui répondent à

$$x = (-1 + 4n)\frac{\pi}{2},$$

le nombre entier n ayant telle valeur qu'on voudra, positive ou négative.

2°. Pour la fonction

$$y = a - x^4 - \frac{4x^3}{3} + 4x^2$$

qui devient $-\infty$ quand on fait $x = \pm\infty$, on trouve aisément que la courbe a trois points où la tangente est parallèle aux x; qu'un *minimum* a répond à $x = 0$, un *maximum* $a + 10,66\ldots$ répond à $x = -2$, et un autre $a + 4,33\ldots$ répond à $x = 1$.

III. Un *maximum* et un *minimum* peuvent être indifféremment positifs ou négatifs. On doit se rappeler à cet égard qu'une quantité négative est d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus petite, et *vice versâ*.

IV. Lorsque deux variables sont liées par une équation du second degré, on peut, en imitant le mode de discussion du n° 169, étudier la forme générale de la courbe exprimée

(*) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que, suivant le Dictionnaire de l'Académie française, le mot *maximum* est toujours un substantif, et qu'on doit par conséquent éviter les expressions telles que *le poids maximum*, *le prix maximum, etc.* Encore moins doit-on dire *la valeur maxima, la distance* ou *la hauteur maxima*. Il faut dire *le maximum du poids, du prix, de la valeur, etc.* Au pluriel, il paraît convenable d'écrire *maximums*, comme on écrit les factums, les factotums, les pensums.

par cette équation, et en conclure, s'il y a lieu, soit le *maximum* et le *minimum* de l'une des variables, si la courbe a un centre, soit son *maximum* ou son *minimum*, dans le cas contraire. Cette variable étant désignée par x et l'autre par y, c'est par rapport à celle-ci qu'on résoudra l'équation.

273. *Détermination des valeurs particulières qui, pour certaines fonctions, se présentent sous les formes* $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Soit

$$y = \frac{u}{v} = \frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{f}(x)},$$

et supposons qu'une valeur particulière de x, désignée par x_0, rende nuls les deux termes de cette fraction. Par exemple

$$y = \frac{1 - \cos(x - x_0)}{\sin(x - x_0)}.$$

Dans ce cas, on désigne souvent sous le nom de *vraie valeur* de la fraction la limite dont elle s'approche indéfiniment, à mesure que x s'approche de x_0.

Pour obtenir cette valeur, mettons $x + \Delta x$ au lieu de x. La fonction y devient en général $\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ et se réduit par $x = x_0$ à $\frac{\Delta u}{\Delta v}$, dont la limite, quand on fait décroître Δx, est

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}} = \frac{\mathrm{F}'(x_0)}{\mathrm{f}'(x_0)},$$

c'est-à-dire que la vraie valeur de y qui répond à x_0 s'obtient en substituant aux deux termes de la fraction leurs dérivées, et faisant ensuite $x = x_0$.

Si $\mathrm{F}'(x_0)$ est encore nulle sans que $\mathrm{f}'(x_0)$ le soit, la va-

leur particulière cherchée est nulle ; si c'est l'inverse, elle est infinie.

Exemple :

$$y = \frac{1 - \cos(x - x_0)}{\sin(x - x_0)}, \quad \frac{F'(x)}{f'(x_0)} = \frac{\sin(x - x_0)}{\cos(x - x_0)}$$

qui par $x = x_0$ donne $y = 0$.

On peut se figurer géométriquement la règle précédente. F (x) et f (x), qui s'annulent par $x = x_0$, peuvent être prises pour les ordonnées de deux courbes qui se coupent sur l'axe des x, au point dont l'abscisse est x_0. Dans le voisinage de ce point, les courbes se confondent avec leurs tangentes, sauf une erreur qui diminue à mesure que x approche de la limite x_0. Donc le rapport des deux ordonnées diffère de moins en moins de celui des coefficients angulaires des tangentes, c'est-à-dire du rapport des dérivées $F'(x)$ et f (x) pour $x = x_0$.

Si $F'(x)$ et $f'(x)$ devenaient toutes deux nulles par $x = x_0$, on leur appliquerait la même règle : on substituerait à $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ la fraction $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, et ainsi de suite.

274. Supposons que les deux termes de la fraction $\frac{u}{v}$ deviennent infinis. On peut alors écrire $y = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}}$ et rentrer dans le cas précédent. Or

$$d\frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2} \quad \text{et} \quad d\frac{1}{u} = -\frac{du}{u^2};$$

donc pour $x = x_0$ on a

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{dv}{v^2}}{\frac{du}{u^2}},$$

d'où

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{v}\mathrm{d}v, \quad \text{ou} \quad \frac{u}{v} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}.$$

C'est la même formule que pour le cas précédent.

REMARQUES. I. On voit que l'esprit de la méthode à suivre quand une fonction prend une forme singulière par suite d'une certaine valeur attribuée à la variable, consiste à substituer à cette valeur une autre qui en diffère très-peu, et à chercher la limite de la fonction à mesure que la différence diminue.

II. Si un facteur commun est en évidence aux deux termes de la fraction, il est clair qu'on doit immédiatement le supprimer.

Exemple :

$$y = \frac{\sqrt[3]{x - x_0}}{\sqrt[4]{x^2 - x_0^2}} = \frac{(x - x_0)^{\frac{1}{3}}}{(x - x_0)^{\frac{1}{4}}(x + x_0)^{\frac{1}{4}}} = \frac{(x - x_0)^{\frac{1}{12}}}{(x + x_0)^{\frac{1}{4}}},$$

qui tend vers *zéro* à mesure que x approche de x_0.

275. *Développement des fonctions en séries.* Un emploi utile des dérivées successives se trouve dans le développement des fonctions en série suivant les puissances entières de la variable. Le type de cette forme des quantités est la somme d'une progression géométrique. Soit

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^{n-1}.$$

On sait que cette somme de n termes est égale à $\frac{ax^n - a}{x - 1}$, c'est-à-dire que *la somme des termes d'une progression géométrique est égale au terme qui viendrait immédiate-*

ment après le dernier, diminué du premier et divisé par la raison moins 1.

Si la raison x est plus petite que l'unité, la formule subsiste, mais on peut la mettre sous la forme $\frac{\frac{a}{x} - ax^{n-1}}{\frac{1}{x} - 1}$, c'est-à-dire que *la somme des termes de la progression est égale au terme qui précéderait le premier diminué du dernier et divisé par l'inverse de la raison diminué de* 1.

Dans ce même cas où la progression est décroissante, le dernier terme ax^{n-1} devient aussi petit qu'on veut, si l'on prend n assez grand; donc à mesure qu'on augmente le nombre des termes, leur somme approche indéfiniment de $\frac{\frac{a}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$ ou $\frac{a}{1 - x}$ qui est par conséquent sa limite. C'est ce qu'on exprime en d'autres termes, qui ont la même signification, quand on dit que *la somme des termes d'une progression décroissante, poussée à l'infini, a pour valeur le premier terme divisé par* 1 *moins la raison, ou le terme qui précéderait le premier divisé par l'inverse de la raison diminué de* 1.

Exemple :

$$\lim\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1.$$

Ces règles s'appliquent aussi bien aux cas où la raison est négative.

Exemples :

$$1 - 2 + 4 - 8 = \frac{16 - 1}{-2 - 1} = -5,$$

$$\lim\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

276. Une suite indéfinie de termes soumis à une loi qui fait que la somme des n premiers termes approche de plus en plus et autant qu'on veut d'une certaine limite S, quand on augmente le nombre n à partir d'une certaine valeur, s'appelle une *série convergente*, et la limite S s'appelle la *somme* de la série. Un progression décroissante est donc une série convergente.

Pour constater qu'une série est convergente, il suffit de s'assurer qu'à partir d'un certain terme, tous les termes suivants sont respectivement plus petits que ceux d'une progression géométrique décroissante. C'est la remarque dont nous avons fait usage au nº 242.

277. Nous venons de voir que $\frac{a}{1-x}$ est une fonction de x développable, quand x est < 1, en une série convergente suivant les puissances de x, ce qu'on écrit ainsi :

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \ldots.$$

Supposons maintenant qu'une autre fonction désignée par $F(x)$ jouisse de la même propriété, et cherchons les coefficients des termes successifs de la série. A cet effet, posons

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

entendant que le nombre des termes du second membre est poussé aussi loin que l'exige le degré d'approximation qu'on veut obtenir. En prenant les dérivées successives des deux membres, on a

$$F'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots,$$
$$F''(x) = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \ldots,$$
$$F'''(x) = 2.3D + 2.3.4Ex + \ldots,$$

et ainsi de suite.

De ces équations qui doivent subsister, quelle que soit la valeur de x, au moins quand elle est assez petite, il est facile de conclure les coefficients A, B, C, D,..., indépendants de x. En y faisant $x=0$ et appelant $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$,..., ce que deviennent alors la fonction $F(x)$ et ses dérivées successives, on obtient

$$A=F(0),\quad B=F'(0),\quad C=\frac{F''(0)}{2},\quad D=\frac{F'''(0)}{2.3},\ \text{etc.},$$

formules dont la loi est manifeste et d'où l'on conclut

$$F(x)=F(0)+F'(0)\frac{x}{1}+F''(0)\frac{x^2}{1.2}+F'''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Exemples. I.

$F(x)=(a+x)^m$	$F(0)=a^m$
$F'(x)=(a+x)^{m-1}$	$F'(0)=ma^{m-1}$
$F''(x)=m(m-1)(a+x)^{m-2}$	$F''(0)=m(m-1)a^{m-2}$
$F'''(x)=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$	$F'''(0)=m(m-1)(m-2)a^{m-3}$

....

$$(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3+\ldots.$$

C'est la formule du binôme de Newton applicable à un exposant quelconque, pourvu que n soit assez petit pour que la série soit convergente.

II. On obtient sans difficulté les séries

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots,$$

dont la loi est évidente.

278. *Série de Taylor.* Soit

$$y = \mathrm{f}(h + x).$$

Supposé que h soit une constante, on remarquera que les dérivées de cette fonction par rapport à x sont les mêmes que les dérivées par rapport à h, prises en supposant x constant, et que, quand on y fait $x = 0$, elles deviennent $\mathrm{f}'(h)$, $\mathrm{f}''(h)$, ..., absolument comme si x eût été préalablement effacé de la fonction, et qu'on eût traité h comme variable, ce qui eût donné $\mathrm{f}(h)$ et ses dérivées successives. D'après cela, la formule du numéro précédent devient

$$\mathrm{f}(h+x) = \mathrm{f}(h) + \mathrm{f}'(h)\frac{x}{1} + \mathrm{f}''(h)\frac{x^2}{1.2} + \mathrm{f}'''(h)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ou, en remplaçant h par x et x par h,

$$\mathrm{f}(x+h) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}'(x)\frac{h}{1} + \mathrm{f}''(x)\frac{h^2}{1.2} + \mathrm{f}'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

C'est la série de Taylor, propre à calculer la valeur $y + \Delta y$ que prend une fonction quand la variable x prend un accroissement fini h ou Δx.

§ VII. APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL AUX COURBES PLANES.

279. Tangente. La relation du calcul différentiel avec la détermination des tangentes aux courbes nous est connue, puisque c'est elle qui nous a servi d'introduction à l'étude de ce genre de calcul.

Si

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

est l'équation d'une courbe, on obtient par la différentiation la dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou son inverse $\frac{dx}{dy}$ en fonction de l'une

des coordonnées ou des deux. $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, relativement à l'axe des x, au point dont les coordonnées sont x et y; $\frac{dx}{dy}$ serait le coefficient analogue relativement à l'axe des y.

Exemple. *Ellipse.*

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

d'où

$$a^2ydy + b^2xdx = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Soit sur l'ellipse un point spécial dont les coordonnées sont x' et y', et vérifient par conséquent l'équation

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point, relativement à l'axe des x, est

$$-\frac{b^2x'}{a^2y'};$$

par conséquent l'équation de cette tangente indéfiniment prolongée et rapportée aux mêmes axes, les coordonnées variables d'un quelconque des points de cette droite étant x et y, est (105)

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x'),$$

ou

$$a^2y'y - a^2y'^2 + b^2x'x - b^2x'^2 = 0,$$

ou encore

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

280. Sous-tangente. La tangente en un point M (*fig.* 64) d'une courbe rencontre généralement chacun des axes coor-

donnés en un point. Soit T son intersection avec l'axe des x. P étant le pied de l'ordonnée y du point M sur le même axe, la distance TP s'appelle *sous-tangente* sur l'axe des x. On a

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{TP}} = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\mathrm{TP} = y\frac{dx}{dy}.$$

On trouve de même la sous-tangente sur l'axe des y :

$$\mathrm{T'Q} = x\frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLES. *Ellipse.*

$$\mathrm{TP} = -\frac{a^2y^2}{b^2x} = -\frac{a^2b^2 - b^2x^2}{b^2x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Ainsi l'ellipse étant rapportée à deux diamètres conjugués, la sous-tangente sur l'un d'eux, $2a$, est indépendante de la grandeur de l'autre, $2b$.

Parabole.

$$y^2 = 2px, \qquad y\,dy = p\,dx,$$

$$\mathrm{TP} = \frac{y^2}{p} = 2x, \quad \mathrm{T'Q} = \frac{px}{y} = \frac{y}{2}.$$

La sous-tangente TP est double de l'abscisse, propriété caractéristique de la parabole.

Hyperbole rapportée aux asymptotes (*fig.* 65),

$$y = \frac{k^2}{x}, \quad dy = -\frac{k^2dx}{x^2}, \quad \mathrm{TP} = -x.$$

De TP = PO on conclut TM = TM′, ce qui se rattache aux propriétés reconnues au n° 151.

des coordonnées ou des deux. $\frac{dy}{dx}$ est le coeffi-
laire de la tangente à la courbe, relativeme
au point dont les coordonnées sont x
coefficient analogue relativement à l'ax

EXEMPLE. *Ellipse.*

$$a^2y^2+b^2x^2=$$

d'où

$$a^2ydy+b^2xdx=0,$$

ond

Soit sur l'ellipse un po
sont x' et y', et vérifien

$$a^2y'$$

nt M a pour coeffi-

Le coefficient angu ou les coordonnées sont
vement à l'axe de

fig. 64) son intersection avec
N s'appelle la *sous-normale* sur

par conséqu
prolongée
variables
x et y,

$$\frac{MP}{PN}=\frac{dx}{dy},$$

$$PN=y\frac{dy}{dx}.$$

normale sur l'axe des y serait $x\frac{dx}{dy}$.

EXEMPLES. *Ellipse.*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad PN=-\frac{b^2x}{a^2}.$$

Parabole.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y},\qquad PN=p.$$

male de l'ellipse est proportionnelle à l'ab-
de valeur absolue est $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire la
32).
parabole est constante et égale à
double de la distance du som-

re des courbes planes.
rbe plane (*fig.* 66),
de la même courbe
'. Si la courbe est un
des deux normales est indé-
l'arc MM'; la distance MO' est
entre du cercle. Si la courbe n'est
si, en considérant comme constante la
normale MN, on fait varier le second point
par conséquent, la normale M'N', le point d'in-
ction O' des deux normales est variable. Dans ce
cas, la distance MO', à mesure qu'on prend l'arc MM' de plus en plus petit, approche autant qu'on veut d'une certaine limite MO, qu'on appelle le *rayon de courbure* de la courbe considérée au point M, et le point O dont s'approche indéfiniment l'intersection O' est le *centre de courbure* de la courbe au même point M.

C'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée en disant que *le centre de courbure du point* M *est à l'intersection de la normale* MN *en ce point et de la normale infiniment voisine.*

283. Problème. *Connaissant l'équation $y = f(x)$ d'une courbe plane en coordonnées rectangulaires, trouver l'expression de son rayon de courbure au point dont les coordonnées sont x et y.*

En considérant la figure MM'O' comme un triangle qui

tend à devenir isocèle et dans lequel, l'angle MO'M' étant très-petit, on a, aussi approximativement qu'on veut, et sauf une erreur qui disparaît à la limite,

$$\mathrm{MO'} = \frac{\mathrm{MM'}}{\operatorname{tang} \mathrm{MO'M'}}.$$

Désignant par $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ les coordonnées du point M', on a

$$\mathrm{MM'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{ou} \quad \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Pour exprimer tang MO'M', menons en M et M' les tangentes MT, M'T', faisant avec Ax les angles α et α'. Nous aurons

$$\mathrm{MO'M'} = \alpha' - \alpha,$$

et, par conséquent (57),

$$\operatorname{tang} \mathrm{MO'M'} = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}.$$

Désignons par i l'inclinaison tang α ou $\frac{dy}{dx}$, et par $i + \Delta i$ l'inclinaison tang α' : nous aurons ainsi

$$\operatorname{tang} \mathrm{MO'M'} = \frac{\Delta i}{1 + i^2 + i \Delta i}.$$

Substituons les valeurs de MM' et de tang MO'M', ainsi trouvées, dans l'expression de MO'; elle devient

$$\mathrm{MO'} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \, (1 + i^2 + i \Delta i)}{\frac{\Delta i}{\Delta x}}.$$

Or, à mesure que Δx diminue, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ approche indéfiniment de $\frac{dy}{dx}$, égal à i ou à $f'(x)$, tandis que $\frac{\Delta i}{\Delta x}$ ap-

proche autant qu'on veut d'une limite qu'on peut indifféremment représenter, soit par $\frac{di}{dx}$, dérivée de la fonction i, soit par $f''(x)$, dérivée du second ordre de $f(x)$; et en même temps le facteur $(1+i^2+i\Delta i)$ approche de sa limite $1+i^2$.

Il résulte de là qu'en désignant par ρ le rayon de courbure MO, on a la formule

$$\rho = \frac{(1+i^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{di}{dx}},$$

ou

$$\rho = \frac{\left\{1+[f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

284. Si l'on convient de prendre toujours le numérateur positif, le rayon de courbure aura le signe de $f''(x)$: il sera donc positif ou négatif, selon que la courbe aura sa concavité tournée vers le sens positif ou négatif des ordonnées.

285. Prenons pour exemple la parabole exprimée par $y^2 = 2px$. Cette équation différentiée donne

$$y\,dy = p\,dx, \quad \text{ou} \quad yi = p.$$

Cette dernière équation, dans laquelle y et i sont des fonctions de x, étant différentiée, donne

$$y\frac{di}{dx} + i\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

$$y\frac{di}{dx} + i^2 = 0.$$

De là on tire

$$i = \frac{p}{y} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dx} = -\frac{p^2}{y^3},$$

et ces valeurs étant substituées dans l'expression de ρ, on trouve

$$\rho = -\frac{y^3\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

ou

$$\rho = \mp\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

en donnant à cette dernière formule un signe contraire à celui de y.

Dans le cas particulier où le point M est le sommet de la parabole, on a

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \rho = p,$$

c'est-à-dire (129) que le rayon de courbure est double de la distance au foyer. Cela résulte aussi du n° 281, car le rayon de courbure au sommet, soit de la parabole, soit de l'ellipse, est égal à la sous-tangente.

286. *Tangentes aux courbes dans l'espace.* Soit une courbe définie (90) par deux équations

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = 0,$$

qui sont celles de deux surfaces dont elle est l'intersection. Il en résulte que si nous désignons par x', y' et z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, elles doivent, étant mises pour x, y et z, satisfaire à ces équations (1); et deux quelconques de ces coordonnées x', y' et z' sont des fonctions de la troisième, de sorte qu'on obtiendra leurs dérivées en différentiant les deux équations (1) conformément à ce qui a été dit à la fin du n° 253.

Pour plus de généralité et de symétrie dans les formules, nous laissons arbitraire le choix de la variable indépen-

dante, et nous écrivons

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx'}dx'+\dfrac{dF}{dy'}dy'+\dfrac{dF}{dz'}dz'=0, \\ \dfrac{df}{dx'}dx'+\dfrac{df}{dy'}dy'+\dfrac{df}{dz'}dz'=0. \end{cases}$$

Cela posé, occupons-nous de la détermination de la tangente à la courbe dont il s'agit. Cette droite passant par le point dont les coordonnées sont x', y', z', on peut mettre ses équations sous la forme (175)

$$(3)\quad \frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}.$$

De plus en remarquant que la définition du n° 225 s'applique aussi bien à une courbe à double courbure qu'à une courbe plane, on voit aisément que la projection de la tangente à une courbe sur un plan est la tangente à la projection de la courbe sur ce même plan, les projections étant d'ailleurs rectangulaires ou obliques.

De là il résulte que les équations (3) peuvent être remplacées par

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$$

et

$$z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'),$$

ou bien

$$\frac{x-x'}{dx'}=\frac{y-y'}{dy'}=\frac{z-z'}{dz'}.$$

Ainsi les trois différentielles dx', dy', dz' qui entrent au premier degré dans tous les termes des équations (2), sont proportionnelles aux différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$; elles s'éliminent donc immédiatement, et l'on a pour les

équations cherchées de la tangente

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0,$$

$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0.$$

Il est entendu que x, y, z sont ici les coordonnées variables d'un point quelconque de la tangente, et que les coefficients $\frac{dF}{dx'}$, $\frac{df}{dx'}$, etc., dérivées partielles des fonctions F et f, dans lesquelles on a mis pour x, y et z les coordonnées x', y' et z' du point de contact, ne renferment que ces dernières coordonnées, et les autres constantes appartenant à ces mêmes fonctions F et f.

287. *Plan tangent à une surface.* Soit l'équation de cette surface

(1) $$F(x, y, z)=0.$$

Si par le point dont les coordonnées sont x', y', z', et satisfaisant à cette relation, on fait passer une autre surface dont l'équation soit

(2) $$f(x, y, z)=0,$$

la tangente à la courbe d'intersection aura pour l'une de ses équations

(3) $$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0,$$

qui est celle d'un plan passánt par le point dont les coordonnés sont x', y' et z'. Cette équation est indépendante de la fonction f qui, en changeant, détermine sur la première surface autant de courbes diverses qu'on voudra. Le plan défini par l'équation (3) contient donc les tangentes à toutes

ces courbes : donc il est le plan tangent à la première surface.

288. Application. *En un point d'un ellipsoïde on mène un plan tangent et du centre on abaisse une perpendiculaire sur ce plan; on demande la distance δ du centre au plan tangent, et les angles que fait la perpendiculaire avec les axes principaux de l'ellipsoïde.*

Mettons pour simplifier l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$nx^2 + py^2 + qz^2 = 1,$$

x', y' et z' étant les coordonnées du point M′ pris sur cette surface; la formule (3) ci-dessus donne, pour le plan tangent en ce point, l'équation

$$nx'(x - x') + py'(y - y') + qz'(z - z') = 0,$$

qui, à cause de

$$nx'^2 + py'^2 + qz'^2 = 1,$$

se réduit à

$$nx'x + py'y + qz'z = 1.$$

Cette équation étant identifiée avec l'équation (1) du n° 181

$$x \cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) + y \cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) + z \cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = \delta,$$

donne

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) = nx'\delta,$$
$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) = py'\delta,$$
$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = qz'\delta.$$

En élevant au carré et ajoutant, on obtient

$$1 = (n^2 x'^2 + p^2 y'^2 + q^2 z'^2)\,\delta^2;$$

d'où

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n^2 x'^2 + p^2 y'^2 + q^2 z'^2}},$$

et

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) = \frac{nx'}{\sqrt{n^2 x'^2 + p^2 y'^2 + q^2 z'^2}},$$

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{y}) = \frac{py'}{\sqrt{}},$$

$$\cos(\mathrm{N}, \mathrm{z}) = \frac{qz'}{\sqrt{}}.$$

Quant aux coordonnées du pied de la perpendiculaire, elles sont

$$x'' = \delta \cos(\mathrm{N}, \mathrm{x}) = nx'\delta^2,$$

$$y'' = py'\delta^2,$$

$$z'' = qz'\delta^2.$$

Ces formules sont employées dans l'admirable théorie de la rotation des corps solides due à M. Poinsot.

CHAPITRE IV.

NOTIONS DE CALCUL INTÉGRAL.

§ I. CONSIDÉRATIONS FONDAMENTALES.

289. Quand l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ d'une courbe par rapport à l'axe des x est connue en fonction de x, on conçoit que c'est une donnée suffisante pour déterminer la forme de la courbe, et même sa situation relative aux axes si l'on connaît en outre un point par lequel elle doit passer.

Soit $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Si l'on reconnaît $f(x)$ pour la dérivée d'une fonction connue $F(x)$, on en conclura que $y = F(x)$ sera l'équation d'une courbe satisfaisant à la condition donnée, et qu'on aura autant de courbes qu'on voudra satisfaisant à cette condition en posant la formule

$$y = F(x) + C,$$

dans laquelle C exprime une constante arbitraire, c'est-à-dire une quantité qui ne varie pas pour les divers points d'une même courbe, mais qui change quand on passe d'une courbe à une autre satisfaisant également à la condition $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

290. *Exemples.* Soit $\frac{dy}{dx} = px^m$, l'exposant m étant un nombre quelconque, positif ou négatif, mais différent de -1.

On sait que $\frac{\mathrm{d}ax^n}{\mathrm{d}x}$ est nax^{n-1}. Choisissant n et a de sorte qu'on ait

$$na = p \quad \text{et} \quad n - 1 = m,$$

c'est-à-dire

$$n = m + 1 \quad \text{et} \quad a = \frac{p}{n} = \frac{p}{m+1},$$

on trouve que $\frac{px^{m+1}}{m+1}$ a pour dérivée px^m. Donc la formule générale de y est

$$\frac{px^{m-1}}{m+1} + C.$$

2°. Soit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{x}$.

En partant de $\frac{\mathrm{d}\log x}{\mathrm{d}x} = \frac{\log e}{x}$, on trouve aisément

$$y = \frac{p}{\log e}\log x + C = 2{,}3026\, p \log x + C.$$

En général, l'expression $y = \mathrm{F}(x) + C$ déduite de l'équation $\mathrm{d}y = \mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle *l'intégrale indéfinie* de $\mathrm{d}y$ ou de $\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x$.

291. La constante C cesse d'être arbitraire si l'on a les coordonnées x_0 et y_0, d'un point de la courbe: car, en outre de

$$y = \mathrm{F}(x) + C,$$

on aura

$$y_0 = \mathrm{F}(x) + C;$$

d'où

$$y - y_0 = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0).$$

Cette quantité $y - y_0$, accroissement de y à partir de y_0, ou depuis l'abscisse x_0 jusqu'à l'abscisse x, s'appelle *l'intégrale définie* de $\mathrm{d}y$ ou de $\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{d}x$ depuis x_0 jusqu'à x.

Exemple. Si la courbe dont l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ relativement à l'axe des x est px^m, passe par l'origine des coordonnées, alors on a $C=0$, et l'expression de y est simplement

$$y=\frac{px^{m+1}}{m+1}.$$

292. Il convient de savoir d'où vient la dénomination *intégrale*.

Soient x_0, y_0, les coordonnées connues du point M_0 (*fig.* 67). On connaît en outre l'inclinaison f (x) de la tangente par rapport à l'axe des x, pour tout point de la courbe, en fonction de son abscisse x. On demande l'ordonnée Y du point M dont l'abscisse est X. Soient

P_0P ou $X-x_0$ subdivisé en intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_5$;
I_1 l'inclinaison de la corde M_0M_1;
I_2, I_3, I_4, I_5, celles des cordes suivantes M_1M_2, $M_2M_3\ldots$;
$M_1N_1=M_1P_1-M_0P_0=\Delta_1$, la différence des deux ordonnées consécutives;
$\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, les autres différences analogues.

On aura

$$\Delta_1=I_1\delta_1,\quad \Delta_2=I_2\delta_2,\ldots,\quad \Delta_5=I_5\delta_5,$$

d'où

$$Y-y_0=I_1\delta_1+I_2\delta_2+I_3\delta_3+I_4\delta_4+I_5\delta_5;$$

ce qui s'exprime en abrégé, quel que soit le nombre fini des subdivisions, de cette manière :

$$Y-y_0=\Sigma I\delta.$$

Si le nombre des divisions devient tellement grand et les arcs tellement petits qu'on puisse considérer les cordes comme se confondant avec les tangentes aux points successifs de la courbe, alors les valeurs successives de I peuvent

être remplacées par celles de f (x) ; l'erreur que l'on commet est d'autant moindre que les intervalles δ sont plus petits, et devient aussi petite qu'on veut.

Si par exemple on fait en sorte que la différence entre chaque valeur de f (x) et celle de I correspondante soit moindre qu'un millionième de celle-ci, l'erreur commise est moindre qu'un millionième de la valeur totale $\Sigma I\delta$.

On peut donc écrire

$$Y-y_0=\lim [f(x_0)\delta_1+f(x_0+\delta_1)\delta_2 + f(x_0+\delta_1+\delta_2)\delta_3+\ldots f(X-\delta_n)\delta_n]$$

ou, en faisant

$$OP_1=x_1, \quad OP_2=x_2, \quad OP_3=x_3\ldots$$

et par suite

$$\delta_1=x_1-x_0, \quad \delta_2=x_2-x_1, \quad \delta_3=x_3-x_2\ldots,$$

$$Y-y_0=\lim [f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1) + f(x_2)(x_3-x_2)+\ldots f(x_{n-1})(X-x_{n-1})].$$

L'usage est de représenter la notation du second membre par cette autre beaucoup plus simple :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

qui a la même signification et qu'il faut par conséquent interpréter en des termes équivalents à ceux-ci :

Limite de la somme qu'on obtient :

1°. *En mettant pour x dans l'expression* f (x) *une suite de n valeurs* x_0, x_1, x_2, x_3,..., *qui varient par degrés égaux ou inégaux, mais très-petits, depuis* x_0 *jusqu'à une valeur* x_{n-1} *qui diffère très-peu de* X;

2°. *En multipliant les valeurs* f (x_0), f (x_1), f (x_2), f (x_3)..., f (x_{n-1}), *respectivement par les différences*

$(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_2)\ldots$, $(X - x_{n-1})$, *c'est-à-dire chaque valeur de la fonction par la différence entre la valeur de x qui l'a produite et la valeur suivante de cette même variable ;*

3°. *En ajoutant les n produits ainsi formés.*

Plus le nombre n augmente, plus on approche de la vraie valeur représentée par la notation ci-dessus. Le résultat ainsi obtenu, étant considéré comme la quantité *tout entière* (en latin *integra*), dont $f(x)\,dx$ exprime un élément infiniment petit, s'appelle pour cette raison *l'intégrale* de $f(x)\,dx$. Les quantités x_0, X, dont la signification est expliquée ci-dessus, déterminent *les extrémités de l'intégrale, ou les limites entre lesquelles la différentielle* $f(x)\,dx$ *est intégrée.*

293. Il résulte de ces considérations que les intégrales peuvent avoir divers caractères :

1°. Quand on donne

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ou} \quad dy = f(x).dx$$

et qu'il s'agit seulement de trouver une expression générale de y, c'est-à-dire de toutes les fonctions dont la dérivée est $f(x)$ ou dont la différentielle est $f(x)\,dx$, si l'on parvient à découvrir une fonction $F(x)$ dont la dérivée $F'(x)$ soit égale à $f(x)$, on a la réponse à la question en posant

$$y = F(x) + C.$$

Cette expression s'appelle *l'intégrale indéfinie* de $f(x)\,dx$, et la relation qui existe entre elle et $f(x)$ s'écrit ainsi :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

ce qui signifie simplement que si l'on différentiait $F(x) + C$ par rapport à x, on aurait $f(x)\,dx$.

Exemple :

$$\int ax^m \mathrm{d}x = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{a}{\log e} \log x + C.$$

2°. Lorsque, outre l'équation $\mathrm{d}y = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$, on sait que la fonction y prend une valeur déterminée y_0 pour une valeur également déterminée x_0 de la variable x, et qu'on demande en conséquence la valeur Y de la fonction pour une valeur quelconque X de la variable, en supposant toujours qu'on sache trouver une fonction $\mathrm{F}(x)$ dont la dérivée soit $\mathrm{f}(x)$, la réponse est dans l'équation

$$Y - y_0 = \mathrm{F}(X) - \mathrm{F}(x_0).$$

Le second membre s'appelle *l'intégrale définie de* $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ *prise depuis* x_0 *jusqu'à* X; et la relation qui existe entre cette quantité et $\mathrm{f}(x)$ s'écrit ainsi :

$$\mathrm{F}(X) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

notation dont on comprend l'origine et la signification, d'après les explications du n° **292**.

294. Les considérations du n° **292** ne servent pas seulement à expliquer une notation, elles fournissent un THÉORÈME TRÈS-IMPORTANT, savoir :

Étant donnée une fonction quelconque $\mathrm{f}(x)$, *si l'on demande une autre quantité qui, d'après sa définition, puisse être représentée par la formule*

$$\lim \left[\mathrm{f}(x_0)(x_1 - x_0) + \mathrm{f}(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \mathrm{f}(x_{n-1})(X - x_{n-1})\right],$$

ou plus simplement, mais avec la même interprétation,

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

toutes les fois qu'il sera possible de trouver une quantité F (x) *dont la dérivée serait* f (x), *on aura la réponse en posant*

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(X) - \mathrm{F}(x_0).$$

295. *Remarque.* Une intégrale définie peut être négative, soit que, entre les deux extrémités de cette intégrale, la valeur moyenne de la dérivée f (x) soit négative; soit que x_0, première valeur extrême de la variable, se trouve plus grande que la seconde X, auquel cas l'intégrale est la limite de la somme des produits des valeurs successives de la fonction, $\mathrm{f}(x_0)$, $\mathrm{f}(x_1),\ldots,$ $\mathrm{f}(x_{n-1})$, multipliées par les différences négatives $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1,\ldots,$ $X - x_{n-1}$; et il est évident que le résultat ne diffère que par le signe de celui qu'on aurait en changeant l'ordre des valeurs extrêmes. C'est d'ailleurs ce qui se conclut immédiatement de la formule précédente, étendue à tous les cas possibles. On a, en désignant toujours par F (x) une fonction dont la dérivée est f (x),

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(X) - \mathrm{F}(x_0),$$

et

$$\int_{X}^{x_0} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(X),$$

d'où

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{X}^{x_0} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

296. La quadrature des courbes offre une application très-utile du théorème du n° 294.

Soit représentée dans la *fig.* 67 la courbe ayant pour équation $y = \mathrm{f}(x)$. L'aire $\mathrm{P_0M_0MP}$, bornée par deux ordonnées répondant aux abscisses x_0, X, est la limite de la

somme des trapèzes $P_0M_0M_1P_1$, $P_1M_1M_2P_2,\ldots$, à mesure qu'on augmente le nombre des subdivisions P_0P_1, $P_1P_2,\ldots$

Cette limite est aussi celle de la somme des parallélogrammes $P_0M_0N_1P_1$, $P_1M_1N_2P_2,\ldots$: car, à mesure que les ordonnées consécutives se rapprochent, le petit triangle qui fait la différence d'un trapèze au parallélogramme correspondant, devient une fraction aussi petite qu'on veut du trapèze, et par conséquent la somme de tous les trapèzes ne diffère de la somme des parallélogrammes que d'une quantité qui est une fraction aussi petite qu'on veut de l'une ou de l'autre de ces deux sommes. Celles-ci ont donc la même limite. Donc l'aire P_0M_0MP, si les coordonnées sont rectangulaires, satisfait précisément à la définition de la quantité $\int_{x^0}^{X} f(x)\,dx$, et par conséquent lui est rigoureusement égale.

Si les axes coordonnés font l'angle α, on a la surface

$$U = \sin\alpha \int_{x_0}^{X} y\,dx.$$

297. Exemples. 1°. *Quadrature de la courbe parabolique* ayant pour équation $y = ax^m$ (*fig* 68) :

$$P_0M_0MP = U = \int_{x^0}^{X} ax^m\,dx.$$

Si l'on cherche une fonction dont la dérivée soit ax^m, on trouve (290, 1°)

$$F(x) = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C,$$

donc

$$U = \int_{x_0}^{X} ax^m\,dx = F(X) - F(x_0)$$
$$= \frac{a}{m+1}\left(X^{m+1} - x_0{}^{m+1}\right).$$

Si l'on voulait l'aire OMP, on aurait

$$x_0 = 0, \quad \text{et} \quad U = \frac{aX^{m+1}}{m+1}.$$

Remarque :

$$\text{aire OMQ} = XY - \text{OMP} = aX^{m+1} - \frac{aX^{m+1}}{m+1} = \frac{maX^{m+1}}{m+1}.$$

2°. *Quadrature de l'hyperbole équilatère rapportée aux asymptotes* et ayant pour équation $y = \frac{a}{x}$ (*fig.* 69).

Cherchant une fonction dont la dérivée soit $\frac{a}{x}$, on trouve (**290**, 2°)

$$F(x) = 2,3026\, a \log x + C;$$

d'où l'on conclut

$$U = \int_{x_0}^{X} \frac{a}{x}\, dx = 2,3026\, a \log \frac{X}{x_0}.$$

Remarques. 1°. L'aire ne dépend que du rapport

$$\frac{X}{x_0} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{OP}}{\text{OP}_0}.$$

2°. Si l'on faisait $x_0 = 0$, on trouverait l'aire yOPM $= \infty$.

3°. Il est bon de rappeler (**242**) que 2,3026 n'est que la valeur approximative de $\frac{1}{\log e}$.

298. Toute intégrale définie $\int_{x_0}^{X} F(x)\, dx$ peut toujours être considérée comme exprimant l'aire d'une courbe dont l'ordonnée rectangulaire correspondante à la variable x prise pour abscisse serait égale à $F(x)$. C'est pourquoi l'opération par laquelle on détermine cette intégrale est fréquemment désignée sous le nom de *quadrature*.

299. La CUBATURE DES SOLIDES terminés par des surfaces courbes est également du ressort du calcul intégral.

Soit l'axe Ox (*fig.* 70), situé d'une manière quelconque par rapport à un corps; soit $MM_0AM'_0M'$ la courbe d'intersection par un plan passant par cet axe. La génération du corps étant soumise à une certaine loi, on suppose que l'aire de la section faite dans ce corps par tout plan tel que $M_0M'_0$ ou MM', perpendiculaire à l'axe, soit une fonction connue de l'abscisse x, distance du point fixe O au plan d'intersection. Cela posé, on demande le volume du segment compris entre les deux plans $M_0M'_0$, MM', dont les abscisses sont $OP_0 = x_0$, $OP = X$.

Soit $f(x)$ la fonction qui donne la valeur de l'aire d'une section dont l'abscisse est x. La section faite par $M_0M'_0$ est $f(x_0)$, celle par MM' est $f(X)$; et si l'on partage l'intervalle $P_0P = X - x_0$ en un grand nombre n de parties; qu'on appelle $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, les abscisses des points de division; que par ces points $P_1, P_2, P_3, \ldots$, on mène des plans $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3, \ldots$, qui donneront des sections $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots$, il est clair qu'on aura une grande approximation du volume cherché en prenant la somme

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \ldots \\ + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}),$$

qui, dans le cas de la figure, est la somme des cylindres inscrits, dont chacun a pour base une section perpendiculaire à l'axe et pour hauteur la distance entre cette section et la suivante.

On voit de plus que l'erreur commise pourra être une fraction aussi petite qu'on voudra du volume cherché, lequel est, par conséquent, et rigoureusement, la limite de la

somme ci-dessus, ou

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

300. *Exemple.* Corps de révolution engendré par l'arc M_0M (*fig.* 71), dont l'équation est $y = ax^m$, tournant autour de l'axe Ox.

Dans ce cas, l'aire d'une section quelconque est celle d'un cercle dont le rayon est y; c'est donc πy^2 ou $\pi a^2 x^{2m}$. Donc le volume cherché est

$$V = \int_{x_0}^{X} \pi a^2 x^{2m} dx = \frac{\pi a^2}{2m+1}(X^{2m+1} - x_0^{2m+1}).$$

Si l'on voulait le volume à compter de O, on ferait $x_0 = 0$.

Si OM_0M était une ligne droite, m serait 1, le corps un cône de révolution, et la formule deviendrait pour le volume, à compter du sommet,

$$V = \frac{\pi a^2 X^3}{3} = \frac{\pi a^2 X^2 . X}{3}.$$

$\pi a^2 X^2 = \pi Y^2$ est la base et X la hauteur.

301. En attendant que l'étude de la Mécanique ait montré d'autres applications du calcul intégral, les exemples qui précèdent suffisent pour faire apercevoir son utilité.

La détermination d'une intégrale définie étant une conséquence immédiate de l'intégrale indéfinie désignée plus haut par $F(x) + C$, c'est dans la recherche de celle-ci que consiste la difficulté des quadratures et des questions analogues.

§ II. THÉORÈMES PRINCIPAUX POUR L'INTÉGRATION DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

302. Les formules des différentielles fondamentales et celles qui sont établies du n° 255 au n° 262 permettent d'é-

crire immédiatement les intégrales indéfinies d'un certain nombre de fonctions.

A cette observation il faut ajouter quelques théorèmes qu'il va suffire d'énoncer, parce qu'ils résultent immédiatement de ceux des nos 244 et suivants.

303. Théorème I. — *Toute intégrale indéfinie est une fonction de la variable, plus une constante arbitraire.*

Théorème II. — *L'intégrale d'une somme de différentielles est la somme de leurs intégrales.*

$$\int [f(x)dx + \varphi(x)dx + \ldots] = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx + \ldots.$$

Théorème III. — *On peut faire passer un facteur constant du dedans au dehors du signe* $\int$, *et réciproquement.*

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx.$$

304. Théorème IV. — *Lorsqu'on peut, par la combinaison des facteurs qui entrent dans une différentielle* $f(x)dx$, *la mettre sous la forme* $aF'(\varphi x)d\varphi(x)$, *on obtient l'intégrale par la formule*

$$\int aF'[\varphi(x)]\,d\varphi(x) = aF[\varphi(x)] + C.$$

Exemples :

1°. $\int x \sin x^2 dx = \int \frac{\sin x^2 . 2x dx}{2} = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C;$

2°. $\int \frac{dx}{a-bx} = \int \frac{-d(a-bx)}{b(a-bx)} = \frac{-\log(a-bx)}{b\log e} + C,$

ou bien

$$\int \frac{dx}{a-bx} = -\int \frac{dx}{bx-a} = -\int \frac{1}{b} \cdot \frac{d(bx-a)}{bx-a}$$
$$= \frac{-\log(bx-a)}{b\log e} + C.$$

On emploiè l'une ou l'autre de ces formules selon que bx est $<$ ou $>a$.

305. Lorsque l'application du théorème IV paraît trop compliquée, on représente la fonction auxiliaire $\varphi(x)$ par une lettre, et l'on opère comme dans l'exemple suivant, où il s'agit d'intégrer

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

On fait

$$\sqrt{1-x^2} = z, \quad 1-x^2 = z^2, \quad -x\,dx = z\,dz,$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{-z\,dz}{x^2}, \quad dy = \frac{-dz}{x^2} = \frac{-dz}{1-z^2}.$$

Pour intégrer $\frac{dz}{1-z^2}$ on l'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{1+z} + \frac{dz}{1-z}\right),$$

où l'on reconnaît deux différentielles de logarithmes; donc

$$y = \frac{1}{2\log e}\left[\log(1-z) - \log(1+z)\right] + C.$$

La fonction entre parenthèses est égale à $\log\frac{1-z}{1+z}$; or

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x^2};$$

donc

$$y = \frac{1}{\log e} \log \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} + C.$$

306. Théorème V. — *Intégration par parties.* — On a (250)

$$\mathrm{d}uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u;$$

donc

$$uv = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Ainsi en décomposant une différentielle $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ en deux facteurs, dont l'un, différentiel et pouvant s'intégrer, soit représenté par $\mathrm{d}v$, et l'autre soit une fonction u, on réduira la difficulté du calcul de l'intégrale $\int u\mathrm{d}v$ à la détermination de l'intégrale $\int v\mathrm{d}u$, qui peut être plus simple que la proposée.

Exemple :

$$y = \int x^m \log x \mathrm{d}x = \log x \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\log e}{x} \mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\log e}{x} \mathrm{d}x = \frac{\log e}{m+1} \int x^m \mathrm{d}x = \frac{\log e}{(m+1)^2} \cdot x^{m+1},$$

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log x - \frac{\log e}{m+1}\right) + C.$$

Ce procédé s'appelle *intégration par parties*.

307. *Remarque.* Lorsqu'on cherche l'aire

$$\mathrm{P_0M_0MP} = \int_{x_0}^{X} y\mathrm{d}x$$

(*fig.* 72,) dans laquelle $\mathrm{OP_0} = x_0$, $\mathrm{OP} = X$, $\mathrm{OQ_0} = y_0$,

$OQ = Y$, on peut y arriver en calculant d'abord l'aire,

$$Q_0M_0MQ = \int_{y_0}^{Y} x\,dy;$$

car on a

$$P_0M_0MP = OPMQ - OP_0M_0Q_0 - Q_0M_0MQ,$$

ou

$$\int_{x_0}^{X} y\,dx = YX - x_0y_0 - \int_{y_0}^{Y} x\,dy;$$

c'est précisément ce que donnerait l'intégration par parties.

§ III. FORMULES D'INTÉGRALES DIRECTES OU OBTENUES PAR LES RÈGLES PRÉCÉDENTES.

308. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (255).

Cas particuliers.

$$m = -\frac{1}{2},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$m = -2,\quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

309. $\int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C = 2{,}3026 \log x + C$

$= 2{,}3026 \log \frac{x}{C'}$ (242).

310. $\int a^x dx = \frac{\log e}{\log a} a^x + C$ (256).

311. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ (*) (257)

$= -\arccos x + C'$ (258).

(*) Il ne faut pas oublier que la notation arc sin x, abrégé de arc(sin $= x$),

312. $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C \quad (259)$$
$$= -\text{arc cot}\, x + C' \quad (260).$$

313. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc séc}\, x + C \quad (261)$$
$$= -\text{arc coséc}\, x + C' \quad (262).$$

Autrement

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \text{arc cos}\,\frac{1}{x} + C'.$$

314. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \quad (258),$$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \quad (257).$$

315. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x + C \quad (259),$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad (260).$$

316. *Exemples d'intégration* (constante sous-entendue).

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{d(ax+b)}{a(ax+b)} = \frac{\log(ax+b)}{a \log e}.$$

II. $$y = \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}.$$

---

signifie l'arc dont le sinus est x, et que les arcs ainsi exprimés ont pour unité l'arc dont la longueur est égale au rayon. Ainsi

$$\text{arc}(\sin = 1) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arc}\left(\sin = \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

De même

$$\text{arc tang}\, 1 = \text{arc}(\text{tang} = 1) = \frac{\pi}{4}.$$

On fait

$$a + x^2 = z^2,$$

d'où

$$x\,\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}z;$$

donc

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}z}{x+z};$$

donc

$$y = \int \frac{\mathrm{d}(x+z)}{x+z} = \frac{\log(x+z)}{\log e};$$

enfin

$$y = \frac{1}{\log e}\log\left(x + \sqrt{a + x^2}\right).$$

Remarque. On aurait pu de la relation

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{x}$$

conclure

$$\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}x}{z - x} = -\frac{\mathrm{d}(z-x)}{z-x},$$

d'où

$$y = -\frac{1}{\log e}\log\left(-x + \sqrt{a + x^2}\right).$$

Il est facile de vérifier que ces deux expressions de y ne diffèrent que par une constante.

III. $$y = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}.$$

IV. $$y = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Cette expression est de la forme

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z = z^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

V. $y = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2\log e}[\log(1+x) - \log(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2\log e}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

VI. $y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\log e}\log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{\log e}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad (305).$$

VII. $y = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x \sin x}{\sin^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{1-\cos x^2}.$

$$\cos x = z;$$

$$y = -\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \frac{1}{2\log e}\log\frac{1-z}{1+z}.$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2\cos^2\frac{1}{2}x} = \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}x;$$

$$y = \frac{1}{\log e}\log\mathrm{tang}\frac{1}{2}x.$$

VIII. $y = \int \mathrm{d}x.\sqrt{1-x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int x.\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \mathrm{d}x\sqrt{1-x^2}.$$

En éliminant $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et mettant pour $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ sa valeur connue (311), on trouve

$$\int dx.\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin x.$$

IX. $y = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On suppose m entier et positif.

En intégrant par parties et faisant dans la formule du n° 306, $u = x^{m-1}$ et $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, on a

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Or

$$\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

donc

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi l'intégration proposée est ramenée à une autre plus simple, puisque l'exposant m de x est diminué de deux unités. En continuant de même on arrivera, suivant que m sera impair ou pair, à

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{ou à} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x.$$

317. *Remarques.* I. L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ se retrouve directement par une considération géométrique. $\sqrt{a^2-x^2}$ peut être regardée comme l'ordonnée pour l'abscisse x, à partir du centre d'une circonférence dont le rayon est a

(*fig.* 73). Soit

$$\text{OP}=x,\quad \text{OM}=a,\quad \text{MP}=\sqrt{a^2-x^2},\quad \text{PP}'=\text{QM}'=dx.$$

Le triangle *différentiel* MQM′ est semblable au triangle OMP. On en conclut

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\text{MM}'}{a}.$$

Or MM′ est l'accroissement que prend l'arc AM quand l'abscisse x prend l'accroissement dx. Donc l'intégrale cherchée, à partir de $x=0$ jusqu'à la valeur x quelconque, telle que OP, est égale à l'arc AM divisé par le rayon, c'est-à-dire égale à l'angle AOM dont le sinus est $\frac{x}{a}$.

On trouve de même l'intégrale $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. La similitude des triangles OMP, MM′Q donne

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\text{MQ}}{x},$$

donc

$$\text{MQ}=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Or, MQ est la quantité infiniment petite dont *décroît* l'ordonnée $\sqrt{a^2-x^2}$ quand x croît de dx. Donc

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-d\sqrt{a^2-x^2}.$$

Le même genre de considération s'applique très-simplement à l'intégrale $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Car, si on la prend à compter de $x=0$, c'est l'aire du segment circulaire OAMP,

laquelle est égale à

$$\text{triangle OMP} + \text{secteur AOM}$$
$$= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arc \sin \frac{x}{a},$$

ce qui est conforme au résultat de l'exemple VIII, quand on fait $a = 1$.

II. Lorsqu'on a une expression différentielle comprise dans la formule $F[x, (a + bx \pm x^2)]\,dx$, on peut la ramener à une autre ordinairement plus simple. Le trinôme se transforme ainsi :

$$a + bx \pm x^2 = a \mp \frac{b^2}{4} \pm \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$$
$$= \left(a \mp \frac{b^2}{4}\right)\left[1 - \left(\frac{x \pm \frac{b}{2}}{\sqrt{a \mp \frac{b^2}{4}}}\right)^2\right];$$

en faisant

$$\frac{x \pm \frac{b}{2}}{\sqrt{a \mp \frac{b^2}{4}}} = z \quad \text{et} \quad a \mp \frac{b^2}{4} = c^2,$$

on a

$$a + bx \pm x^2 = c^2(1 \pm z^2),$$
$$x = cz \mp \frac{b}{2},$$

et

$$dx = c\,dz,$$

trois expressions à substituer dans la proposée.

Cette observation montre la possibilité d'appliquer les formules des nos 311, 312. 318 II, IV, V, VIII et IX à des

cas en apparence différents. Par exemple, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}.$$

§ IV. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

318. Deux variables x et y étant liées par une équation qu'il est toujours possible d'amener à la forme

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}(x,y)=0,$$

chacune d'elles est une fonction implicite de l'autre, et l'on peut de cette équation déduire soit la dérivée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, soit son inverse $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, par la différentiation (253), suivant la formule

$$\text{(2)} \qquad \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=0,$$

chacune des dérivées partielles étant en général une fonction de x et de y.

En combinant les équations (1) et (2), on peut en obtenir d'autres auxquelles devront toujours satisfaire les valeurs simultanées de x, de y et de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, et qui seront comprises dans la formule

$$\text{(3)} \qquad f(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

Exemple. De

$$axy+by^2=c$$

on tire

$$ay\,\mathrm{d}x+ax\,\mathrm{d}y+2by\,\mathrm{d}y=0.$$

Cette différentiation a fait disparaître le terme constant c.

On peut, en combinant ces deux équations, éliminer b, par exemple, et obtenir

$$ay^2 \mathrm{d}x + (2c - axy)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Les équations telles que (2) et (3) s'appellent des *équations différentielles*, et sont, comme on voit, de deux espèces. Les unes, comme (2), sont déduites ou peuvent se déduire immédiatement d'équations telles que (1) par la différentiation, ce qu'on exprime en disant que le premier membre égal à zéro de l'équation (2) est une *différentielle exacte* d'une fonction F (x, y), tandis qu'il en est autrement de l'équation (3).

On comprend l'utilité de pouvoir remonter d'une équation différentielle à l'équation (1) qui l'a produite par différentiation et combinaison, sauf une constante qui a disparu ou pu disparaître.

Il suffit au but que nous nous proposons dans ces leçons de signaler un cas simple où l'intégration se ramène aux quadratures : c'est celui où il est possible de *séparer les variables* dans l'équation différentielle, ce qui signifie que l'équation (3) proposée peut se réduire à la forme

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

la fonction f (y) ne renfermant plus x, et la fonction $\Phi(x)$ étant indépendante de y. Il suffit alors d'intégrer les deux membres en ajoutant à l'un ou à l'autre une *constante* qui sera déterminée lorsque, en outre de l'équation différentielle, on connaîtra deux valeurs simultanées des variables x et y, ou un point de la courbe exprimée par l'équation F $(x, y) = 0$ qu'on cherche.

Exemple. Soit

$$(by^2 - a)\,\mathrm{d}x = bxy\,\mathrm{d}y.$$

On en conclut

$$\frac{dx}{x}=\frac{by\,dy}{by^2-a},$$

d'où

$$2\log x=\log\frac{by^2-a}{c};$$

donc

$$cx^2=by^2-a,$$

équation dans laquelle c est arbitraire, positif ou négatif, s'il ne s'agit que de satisfaire à l'équation différentielle proposée.

§ V. QUADRATURE PAR APPROXIMATION.

319. Étant donnée une loi géométrique ou numérique au moyen de laquelle on peut construire une courbe par points et mesurer ou calculer ses coordonnées relatives à deux axes rectangulaires, on peut toujours calculer l'aire P_0M_0MP (*fig.* 67) comprise entre deux ordonnées déterminées. Ce calcul se fait par approximation lorsque l'ordonnée y n'est pas donnée en fonction explicite de l'abscisse x, ou lorsque cette fonction $f(x)$ est telle, que l'intégrale $\int f(x)\,dx$ ne peut être obtenue sous une expression générale $F(x)+C$.

320. *Première méthode d'approximation.* Lorsqu'on peut déterminer les coordonnées de n points intermédiaires, $M_1, M_2, M_3,\ldots, M_n$, tellement rapprochés, que les arcs $M_0M_1, M_1M_2,\ldots$, se confondent sensiblement avec leurs cordes, on considère l'aire cherchée comme une somme de trapèzes, et l'on a

$$U=\frac{1}{2}(y_0+y_1)\,\delta_1+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\,\delta_2$$
$$+\frac{1}{2}(y_2+y_3)\,\delta_3+\ldots+\frac{1}{2}(y_n+Y)\,\delta_{n+1};$$

formule qui se simplifie beaucoup si les intervalles δ sont égaux :

$$U=\left[\frac{1}{2}(y_0+Y)+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n\right]\delta.$$

321. *Deuxième méthode d'approximation.* Elle est fondée sur la quadrature exacte de la parabole du second degré dont l'axe principal est parallèle à l'axe des ordonnées.

Soient trois points M_0, M_1, M (*fig.* 74), tellement situés, que leurs ordonnées soient équidistantes. Ainsi $P_0P_1=P_1P$. Ces trois points suffisent pour déterminer une parabole dont l'équation sera de la forme

$$y=a+bx+cx^2.$$

Les coefficients a, b, c pourraient être déterminés en fonction des ordonnées y_0, y_1, Y, et des abscisses correspondantes ; on peut donc demander l'aire du segment P_0M_0MP en fonction des mêmes données.

On simplifiera le calcul en transportant l'origine des coordonnées au point P_0. L'équation de la courbe devient alors de la forme

$$(1) \qquad y=y_0+bx+cx^2,$$

et si l'on représente par X la base P_0P du segment, son aire U demandée est donnée par l'équation

$$U=\int_0^X (y_0dx+bxdx+cx^2dx)=y_0X+\frac{bX^2}{2}+\frac{cX^3}{3},$$

où

$$U=\frac{X}{6}(6y_0+3bX+2cX^2).$$

Il ne s'agit plus que de faire disparaître de cette formule

les coefficients b et c, en y introduisant les ordonnées des points M_1 et M, qui doivent satisfaire à l'équation (1).

Celles du point M_1 sont y_1 et $\frac{X}{2}$; donc

$$y_1 = y_0 + \frac{bX}{2} + \frac{cX^2}{4}.$$

Celles du point M sont Y et X; donc

$$Y = y_0 + bX + cX^2;$$

d'où l'on pourrait tirer les valeurs de bX et cX^2. Mais on arrive immédiatement au but en remarquant qu'on a

$$y_0 + 4y_1 + Y = 6y_0 + 3bX + 2cX^2.$$

L'expression de U devient donc

$$U = \frac{X}{6}(y_0 + 4y_1 + Y),$$

ou, si l'on représente par δ la distance $\frac{X}{2}$ de deux ordonnées consécutives,

$$U = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4y_1 + Y) \text{ (*)}.$$

(*) Lorsque les ordonnées y_0, y_1, Y, sont données graphiquement, et non en nombres, on peut aisément, comme l'a remarqué M. Poncelet, remplacer la longueur $y_0 + 4y_1 + Y$ par une ligne de la figure. Joignant M_0 et M par une droite dont le milieu est N, on a

$$P_1N = \frac{1}{2}(y_0 + Y) = y_1 + M_1N,$$

d'où

$$y_0 + Y = 2y_1 + 2M_1N,$$

donc

$$U = \frac{1}{6}(X - x_0)(6y_1 + 2M_1N) = (X - x_0)\left(y_1 + \frac{1}{3}M_1N\right)$$

ou

$$U = P_0P \times P_1K,$$

le point K étant au tiers de la flèche M_1N à partir de la courbe.

322. Ayant à calculer l'aire $P_0 M_0 MP$ d'une courbe quelconque (*fig.* 75), on divisera l'intervalle $P_0 P$ en un nombre pair n de parties égales, et, en désignant par y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, Y, les ordonnées consécutives, on aura approximativement l'aire comprise entre les ordonnées y_0 et y_2, dont la distance est $\frac{2P_0P}{n}$ ou 2δ,

$$\text{aire}\, P_0 M_2 = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

De même, entre y_2 et y_4,

$$\text{aire}\, P_2 M_4 = \frac{\delta}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Enfin, entre y_{n-2} et Y,

$$\text{aire}\, P_{n-2} M = \frac{\delta}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + Y).$$

Donc l'aire totale $P_0 M_0 MP$,

$$U = \frac{\delta}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + Y),$$

ou bien, si l'on appelle en général x_0 et X les abscisses extrêmes correspondantes aux ordonnées y_0 et Y,

$$\int_{x_0}^{X} y\,dx = \frac{X - x_0}{3n}\big(y_0 + Y + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\big).$$

Cette formule d'intégration ou quadrature approximative est due à Thomas Simpson. Pour que le résultat soit suffisamment exact, il faut que la courbe ne diffère pas trop d'une parabole du second degré, et que, par conséquent, les différences des ordonnées consécutives soient à peu près en progression arithmétique.

323. Les ordonnées y_0, y_1 et Y (*fig.* 74) étant équidistantes, on peut chercher l'aire P_0M_1 comprise entre les deux premières en fonction de ces trois ordonnées et de la distance P_0P_1 égale à δ. On trouvera, en suivant la marche précédente,

$$\text{aire } P_0M_0M_1P_1 = \frac{\delta}{12}(5y_0 + 8y_1 - Y).$$

On a de même

$$\text{aire } P_1M_1MP = \frac{\delta}{12}(5Y + 8y_1 - y_0).$$

324. Les lecteurs sont invités à vérifier que, si l'on désigne par y_0, y_1, y_2, Y, quatre ordonnées équidistantes d'une parabole du troisième degré, on a l'aire de cette courbe

$$U = \int_{x_0}^{X} y\,dx = \frac{1}{8}(X - x_0)(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + Y).$$

325. *Intégration par série.* Lorsqu'une intégrale ne peut être obtenue par une formule générale, ou qu'il est difficile de la calculer exactement, on fait quelquefois usage d'un développement en série. Soit, par exemple,

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - ax}}.$$

On peut développer $(1 - ax)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de ax, d'après la formule de Newton (277, I) appliquée à l'exposant $-\frac{1}{2}$. On aura

$$(1 - ax)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}ax + \frac{1.3}{2.4}a^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^3x^3 + \ldots,$$

série convergente si ax est < 1.

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, on aura dy exprimé en une somme de termes de la forme $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ que l'on sait intégrer (316, IX).

326. Soit pour second exemple

$$y = \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Nous savons que cette intégrale est arc tang$x$, de sorte que si elle est prise de $x = 0$ à $x = 1$, elle est égale à l'arc de $45°$, c'est-à-dire à $\frac{\pi}{4}$.

De là l'idée de calculer l'intégrale indépendamment de la connaissance de π, afin d'arriver à cette connaissance. A cet effet, on développe $\frac{1}{1+x^2}$ en une série qui n'est autre que la progression

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

Par conséquent, en multipliant par dx et en intégrant à partir de $x = 0$, on a

$$\text{arc tang}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots,$$

série qui aurait pu être obtenue, mais beaucoup moins simplement, par la formule de Taylor.

En y faisant $x = 1$, on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

ou, en réduisant les termes pris deux à deux,

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots.$$

Cette série peut donner la valeur de $\frac{\pi}{8}$, pourvu qu'on en prenne un assez grand nombre de termes, car elle est peu convergente.

Mais il vaut mieux dans la série dont la limite est arc tang$x$ donner à x une valeur plus petite que 1 qui réponde à une fraction connue de π.

Un simple essai graphique fait connaître que la tangente trigonométrique $\frac{1}{5}$ est celle d'un angle qui excède peu le quart de 45°. D'après cela, on est conduit, en appelant a l'angle ou l'arc dont la tangente est $\frac{1}{5}$, à poser

$$\frac{\pi}{4} = 4a - b,$$

et à chercher la tangente de l'arc b par la formule

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang}\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4a - 1}{1 + \operatorname{tang} 4a}.$$

Or

$$\operatorname{tang} a = \frac{1}{5},$$

donc

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{2 \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang}^2 2a} = \frac{120}{119},$$

d'où

$$\operatorname{tang} b = \frac{1}{239}.$$

Connaissant ainsi les tangentes des arcs a et b, on a pu calculer ces deux arcs par deux séries convergentes et en

conclure

$$\pi = 16a - 4b.$$

On a trouvé

$$a = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{5}\right) = 0,197\,395\,560,$$

et

$$b = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{239}\right) = 0,004\,184\,076,$$

d'où

$$\pi = 3,141\,592\,65.$$

Ce moyen rapide de calculer le rapport de la circonférence au diamètre est dû, suivant Lacroix (*Traité de Calcul différentiel*), à l'astronome anglais Machin, qui vivait dans la première moitié du XVIII[e] siècle.

CHAPITRE V.

APPLICATION DU CALCUL INFINITÉSIMAL A LA DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ ET DES MOMENTS D'INERTIE.

§ I. DÉFINITION DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE LIGNE, D'UNE SURFACE OU D'UN CORPS GÉOMÉTRIQUE.

327. Si l'on partage une ligne, une surface ou un corps géométrique, en éléments infiniment petits, égaux ou inégaux, la somme des produits de ces éléments par leurs distances respectives à un plan (c'est-à-dire la limite des valeurs que prend cette somme à mesure que les éléments sont de plus en plus petits) s'appelle le *moment de la ligne, de la surface ou du corps par rapport à ce plan*. Cette dénomination dérive de considérations mécaniques dont on ne doit pas s'occuper ici.

Les produits relatifs aux éléments sont les moments de ces éléments. Les moments de deux éléments par rapport à un plan qui passe entre eux sont de signes contraires. La somme qui forme le moment total est une somme algébrique.

328. Théorème. *Quel que soit un système d'éléments (ligne, surface, ou corps), il existe un point géométrique tellement situé, que le produit de la somme totale de ces éléments multipliée par la distance de ce point à un plan quelconque est égal au moment du système, c'est-à-dire à la somme des moments élémentaires par rapport au même plan.*

Ce point s'appelle le *centre de gravité* du système.

Démonstration. Soient deux éléments dont les grandeurs sont m', m'', occupant les positions M′, M″ (*fig.* 76).

1°. Leur centre de gravité ne peut être que sur la droite M′M″, car autrement le moment du système de ces deux éléments pourrait être nul sans que la somme des moments élémentaires le fût.

2°. Soit G″ le centre de gravité encore inconnu. Si on abaisse sur un plan quelconque les perpendiculaires M′B′, M″B″, G″C, désignées par x', x'', X'', il faut démontrer que le point G″ peut être choisi de manière que l'on ait

$$(m'+m'')\,X''=m'x'+m''x'',$$

ou

$$m'\,(X''-x')=m''\,(x''-X'').$$

Si l'on mène N′N″ parallèle à B′B″, on a

$$X''-x'=\mathrm{M'N'},\quad x''-X''=\mathrm{M''N''}.$$

Ainsi, pour que le point G″ jouisse de la propriété énoncée, il faut et il suffit que l'on ait

$$m':m''::\mathrm{M''N''}:\mathrm{M'N'},$$

ce qui revient à

$$m':m''::\mathrm{M''G''}:\mathrm{M'G''},$$

c'est-à-dire que *le centre de gravité de deux éléments est sur la droite qui joint ces deux éléments, et la partage en deux parties réciproquement proportionnelles aux grandeurs des deux éléments.*

Le point G″ étant ainsi déterminé, l'équation

$$(m'+m'')\,X''=m'x'+m''x''$$

a lieu, quelle que soit la situation du plan de comparaison, pourvu qu'on ait égard aux signes des ordonnées x', x'', X''.

Cette première partie de la démonstration s'applique

exactement à deux systèmes dont les grandeurs seraient m', m'', et dont les centres de gravité seraient en M′, M″. Le point G″ déterminé comme on vient de le dire, c'est-à-dire situé sur la droite qui joint les deux centres de gravité M′, M″, et la partageant en deux parties réciproquement proportionnelles aux grandeurs des deux systèmes, serait le centre de gravité de l'ensemble de ces deux systèmes.

Soient trois éléments m', m'', m''', occupant les positions M′, M″, M‴. On peut partager l'ensemble de ces trois éléments en deux parties, dont l'une soit formée du système des deux éléments m', m'', l'autre sera l'élément m'''. Donc, d'après la remarque qui précède, le centre de gravité du système total est sur la droite qui joint le centre de gravité G″ de l'ensemble des deux premiers éléments à la position M‴ du troisième, et il partage cette droite en deux parties réciproquement proportionnelles aux grandeurs $m' + m''$ et m'''.

Cette démonstration, qui s'étend facilement à un nombre quelconque de points, prouve l'existence du centre de gravité tel qu'il a été défini, et indique le procédé graphique pour le trouver.

329. Si x', y', z', x'', y'', z'', ..., sont les coordonnées rectangulaires des éléments d'un système dont les grandeurs sont m', m'', ..., et si X, Y, Z, sont les coordonnées du centre de gravité, en désignant par Σmx la somme des moments $m'x' + m''x'' + \ldots$, par Σmy et Σmz les sommes analogues, enfin par Σm la somme des éléments, on a, en vertu du théorème précédent,

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} \quad (*).$$

(*) Si tous les éléments m', m'', ..., du système étaient supposés égaux et que leur nombre fût n, les équations deviendraient, par la suppression d'un

330. Les dernières équations subsisteraient également pour des coordonnées obliques : car dans ce cas les coordonnées x', x'', . . . , X, par exemple, sont proportionnelles aux distances des points du système et du centre de gravité au plan des zy.

331. Ces mêmes équations s'appliquent au centre de gravité d'un système total composé de systèmes partiels dont les grandeurs seraient m', m'', . . . , et dont les centres de gravité auraient les coordonnées x', y', z', x'', y'', z'',...; c'est une conséquence facile à déduire du théorème du nº 328. En général, la position du centre de gravité du système total ne dépend que de celles des centres de gravité des systèmes partiels et des rapports de leurs grandeurs. Elle peut se conclure de ces données par le même procédé graphique indiqué au nº 328.

§ II. DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES.

332. On voit aisément que toute ligne courbe ou brisée ayant un centre de figure (c'est-à-dire un point qui se trouve le milieu de toute corde ou diagonale passant par ce point) a son centre de gravité en ce même point. Le centre de gravité d'une ligne droite est évidemment son milieu.

333. Le centre de gravité d'un système quelconque de lignes droites se trouve par la propriété indiquée au nº 331.

334. *Le centre de gravité* G *du contour d'un triangle* ABC (*fig.* 77) est le centre du cercle inscrit au triangle DEF

---

facteur commun,

$$X=\frac{\Sigma x}{n},\quad Y=\frac{\Sigma y}{n},\quad Z=\frac{\Sigma z}{n}.$$

C'est pourquoi le centre de gravité s'appelle aussi *centre des distances moyennes*.

formé par les droites qui joignent les milieux des trois côtés. Car le centre de gravité des deux côtés AB, AC, est sur la droite EF au point H qui divise cette droite en parties EH, HF, proportionnelles aux côtés AC, AB, ou à leurs moitiés ED, FD ; donc la droite DH qui contient G est bissectrice de l'angle EDF. De même G est sur la bissectrice FI de l'angle DFE. Donc....

335. Le centre de gravité d'une courbe plane est dans le plan de la courbe. Pour le déterminer, il suffit de chercher ses distances à deux plans perpenculaires à celui de la courbe; les distances de ces éléments à ces plans sont aussi leurs distances aux droites suivant lesquelles ils coupent le plan de la courbe. On dit alors que les moments sont pris par rapport à ces droites.

336. *Centre de gravité d'un arc de cercle* ACB (*fig.* 78). Il est sur le rayon OC passant par le milieu de l'arc ; sa distance GO $= x$ se détermine en prenant les moments par rapport à OD perpendiculaire à OC. L'élément MM' de l'arc se confondant avec sa corde, dont le milieu est I, les deux triangles semblables MM'N, IKO, font voir que le moment élémentaire $MM' \times IK$ est égal à $MN \times IO$, c'est-à-dire à la projection PP' du petit arc sur la corde AB, multipliée par le rayon. Donc la somme des moments élémentaires est égale à la *corde entière* AB multipliée par le rayon. Or cette somme est aussi égale au moment de l'arc = arc $ACB \times x$; donc, si on désigne l'arc par a, la corde par c, le rayon par R, on a

$$ax = c\text{R}.$$

Si n est le nombre des degrés de l'arc, il faut faire

$$a = \frac{n\pi\text{R}}{180}, \quad \text{et} \quad c = 2\text{R}\sin\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{o}};$$

d'où

$$x = \frac{360 \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\right)^{\circ}}{n\pi} \cdot R.$$

337. *Centre de gravité d'un arc* AB *d'une courbe quelconque* (*fig.* 79). Soient L la longueur de l'arc AB, Y la distance de son centre de gravité G à un plan quelconque, ds un élément de l'arc, y sa distance au même plan : on aura

$$LY = \int y\,ds.$$

Si y, ordonnée MP d'un point quelconque M, était une fonction donnée de la longueur s comprise sur la courbe entre un point fixe O et le point variable M, le calcul intégral pourrait donner la valeur algébrique de $\int y\,ds$. Si cette fonction est inconnue ou trop compliquée, on déterminera dans les cas particuliers la valeur numérique de $\int y\,ds$ au moyen de la formule de Simpson.

A cet effet on divisera la longueur L en un nombre pair n de parties égales ; des points de division on abaissera sur le plan quelconque XZ des perpendiculaires $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, et l'on aura très-approximativement, si le nombre n est suffisant,

$$\int y\,ds = \frac{1}{3}\frac{L}{n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n);$$

d'où

$$Y = \frac{\int y\,ds}{L} = \frac{1}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Cette opération, faite successivement par rapport à trois plans quelconques, donnera les distances du centre de gra-

vité cherché à ces trois plans. Si la courbe est plane, deux distances suffiront ; une seule sera nécessaire si la courbe est orthogonalement symétrique par rapport à une droite, et on n'aura qu'à opérer sur l'une de ses moitiés.

§ III. CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES.

338. Le centre de gravité d'un parallélogramme est à son centre de figure. En général toute surface plane terminée par une ligne courbe ou polygonale ayant un centre de figure (332) a son centre de gravité en ce point. Il en est de même d'une surface courbe ou polyédrique ayant un centre de figure. En effet, dans l'un et l'autre cas, la surface est décomposable en éléments qui sont deux à deux de même étendue et à égale distance du centre.

339. Si une surface plane est comprise entre deux droites parallèles AA_1, BB_1 (*fig.* 80), et entre deux courbes AMB, $A_1M_1B_1$, telles que toute droite MM_1 parallèle aux côtés AA_1 BB_1, ait comme eux son milieu P sur un même axe KL, le centre de gravité *de la surface* est sur cet axe de symétrie oblique ou orthogonale.

Cette vérité est une conséquence du numéro précédent, si l'on considère la surface comme un assemblage de parallélogrammes très-étroits MNN_1M_1, en négligeant les triangles MNM', $M_1N_1M'_1$, infiniment petits par rapport aux parallélogrammes, ce qui ne peut altérer le résultat quand on passe à la limite.

Remarque. Si la symétrie n'est pas orthogonale, l'axe KL qui contient le centre de gravité de la surface peut ne pas contenir celui de son contour.

340. *Centre de gravité* G *de la surface d'un triangle* ABC (*fig.* 81). D'après le numéro précédent, il est à la fois sur AD et sur BE, passant par les milieux D et E de BC et

de AC. D'ailleurs DE est parallèle à AB et d'une longueur moitié de AB; donc

$$GD = \frac{1}{2}AG, \quad \text{ou} \quad DG = \frac{1}{3}AD.$$

Donc, en général, le centre de gravité de la surface d'un triangle est sur la droite menée d'un sommet au milieu du côté opposé, au tiers de cette droite, à partir du côté.

Remarque. Ce point G est aussi le centre de gravité du système de trois corps égaux dont les centres de gravité seraient aux sommets A, B, C.

341. On trouvera *le centre de gravité d'un polygone quelconque* en le décomposant en triangles (331).

342. *Centre de gravité d'un quadrilatère quelconque* ABCD (*fig.* 82). Soit E le milieu de AC. Le centre de gravité du triangle ABC est en H, au tiers de EB à compter de E; de même I, centre de gravité de ADC, est au tiers de ED à compter de E. Le centre de gravité cherché G divise IH en parties IG, GH, réciproquement proportionnelles aux surfaces des triangles, ou aux lignes DF, BF; donc, si l'on porte DF de B en K, en remarquant que BD et HI sont parallèles, on voit que G est sur EK, et que $EG = \frac{1}{3}EK$. De là une règle fort simple pour déterminer graphiquement le point G.

Si l'on connaissait numériquement les longueurs FA, FB, FC et FD, on déterminerait les coordonnées obliques FL et LG du point G par le théorème des moments. On a (328)

$$FL.(\text{surf}\,BDC + \text{surf}\,BDA) = \frac{FC}{3}\text{surf}\,BDC - \frac{AF}{3}\text{surf}\,BDA.$$

Or les deux surfaces sont proportionnelles aux longueurs

FC et AF; donc

$$FL(FC + AF) = \frac{1}{3}(FC^2 - AF^2);$$

d'où

$$FL = \frac{1}{3}(FC - AF).$$

On trouve de même

$$LG = \frac{1}{3}(BF - DF).$$

343. *Centre de gravité d'un trapèze* ABCD (*fig.* 83). Il est sur EF, joignant les milieux E et F des bases parallèles. Si l'on fait AB $= b$, DC $= b'$, EF $= l$, en remarquant que les surfaces des triangles ABC, ADC, sont proportionnelles à b et b', et que les ordonnées de leurs centres de gravité, prises parallèlement à EF et par rapport à AB, sont $\frac{1}{3}l$ et $\frac{2}{3}l$, le théorème des moments donne

$$(b + b')\,EG = \frac{1}{3}bl + \frac{2}{3}b'l;$$

d'où

$$EG = \frac{1}{3}\,\frac{l(b + 2b')}{b + b'}.$$

344. *Centre de gravité d'un secteur circulaire* AOB (*fig.* 84). En décomposant le secteur en éléments infiniment petits égaux, qu'on pourra considérer comme triangulaires et ayant leurs centres de gravité uniformément distribués sur l'arc ab, dont le rayon Oa $= \frac{2}{3}$OA, on verra que le centre de gravité cherché est aussi celui de l'arc ab (336).

345. *Le centre de gravité du segment circulaire* ABCA (*fig.* 85) se déduira de ceux du secteur AOBCA et du tri-

angle AOB.

	Segment.	Triangle.	Secteur.
Aires............	A′	A″	A = A′+ A″
Centre de gravité...	G′	G″	G
Distance au centre O.	G′O = x'	G″O = x''	GO = x

on a

$$\mathrm{A}x = \mathrm{A}'x' + \mathrm{A}''x'', \quad \mathrm{A}' = \mathrm{A} - \mathrm{A}'',$$

d'où

$$x' = \frac{\mathrm{A}x - \mathrm{A}''x''}{\mathrm{A} - \mathrm{A}''}.$$

346. *Centre de gravité du segment* AOA_1 *d'une parabole* (*fig.* 86) dont l'équation est $y^2 = 2px$, les axes Ox, Oy, faisant l'angle α. Le point cherché est sur l'axe de symétrie Ox; on détermine son abscisse X par le théorème des moments.

Le trapèze élémentaire $\mathrm{MM'M'_1M_1}$ peut être remplacé par le parallélogramme $\mathrm{MNN_1M_1}$, dont la surface est $2y \sin\alpha\, dx$: la surface du segment est donc

$$2\sin\alpha \int y\, dx.$$

Le parallélogramme $\mathrm{MNN_1M_1}$ a son centre de gravité au milieu de PP′; son moment, par rapport au point O, est égal à sa surface multipliée par $x + \frac{dx}{2}$, et, en négligeant $\frac{dx}{2}$ auprès de x, devient $2xy \sin\alpha\, dx$; la somme des moments élémentaires est donc

$$2\sin\alpha \int xy\, dx.$$

On a par conséquent

$$X = \frac{\int xy\, dx}{\int y\, dx}.$$

De $y^2 = 2px$ on tire $y\,dy = p\,dx$. Substituant les valeurs de x et de dx en y et dy, puis désignant par y' et x' l'ordonnée et l'abscisse extrêmes AB et OB, on a

$$\int y\,dx = \int \frac{y^2 dy}{p} = \frac{y'^3}{3p},$$

$$\int xy\,dx = \int \frac{y^4 dy}{2p^2} = \frac{y'^5}{10p^2},$$

$$X = \frac{3}{10}\frac{y'^2}{p} = \frac{3}{5}x.$$

347. *Centre de gravité d'une surface plane quelconque* dans le cas où les intégrations sont impossibles ou trop difficiles. Soit la surface comprise entre deux parallèles et entre deux courbes AD, BC (*fig.* 87). On partagera la distance IK en un nombre pair n de parties égales et on mènera les cordes parallèles $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, de l'une à l'autre courbe ; faisant IK $= l$, on aura, par la formule Simpson,

$$\text{surf ABCD} = S = \frac{l}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + y_n).$$

On emploira la même formule pour calculer le moment de la surface par rapport AB. Puisqu'il s'agit de suppléer à l'intégration de $\int xy\,dx$, on calculera les $n+1$ valeurs de xy qui répondent aux points de division de IK, et l'on aura, en désignant par X la distance du centre de gravité cherché à la droite AB,

$$S.X = \frac{l}{3n}\left(4y_1 \cdot \frac{l}{n} + 2y_2 \cdot \frac{2l}{n} + 4y_3 \cdot \frac{3l}{n} + \ldots + y_n \cdot \frac{nl}{n}\right)$$

et

$$X = \frac{l}{n}\left(\frac{4y_1.1 + 2y_2.2 + 4y_3.3 + 2y_4.4 + \ldots + y_n n}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n}\right).$$

Il restera à calculer sa distance Z à IK. A cet effet, on me-

surera la distance du milieu de chaque corde y_0, y_1, y_2, ..., à la droite IK, et, appelant ces distances z_0, z_1, z_2, ..., on aura

$$SZ = \int yz\,dx = \frac{l}{3n}(y_0 z_0 + 4y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + 4y_3 z_3 + \ldots + y_n z_n),$$

et enfin

$$Z = \frac{y_0 z_0 + 4y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + 4y_3 z_3 + \ldots + 4y_{n-1} z_{n-1} + y_n z_n}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n}.$$

Quand les courbes ne sont pas très-irrégulières, il suffit de prendre $n = 4$, et même quelquefois $n = 2$.

348. *Le centre de gravité d'une zone sphérique* (*fig.* 88) engendrée par l'arc AB tournant autour du rayon OE est au milieu de l'axe DC : car si l'on décompose la zone totale en zones élémentaires par des plans équidistants, celles-ci auront leurs aires égales et leurs centres de gravité uniformément répartis sur DC.

S'il s'agissait d'une *surface de révolution quelconque* (*fig.* 89), on appliquerait la formule de Simpson : appelant X la distance du centre de gravité G au point C, x l'abscisse CP d'un point M, y son ordonnée MP et ζ la normale variable MN, on aura, à cause de la similitude du triangle différentiel MM'Q et du triangle MNP,

$$\text{surf de la zone} = \int 2\pi y\,ds = \int 2\pi\zeta\,dx,$$

$$\text{son moment par rapport à AC} = \int 2\pi\zeta x\,dx;$$

donc

$$X = \frac{\int \zeta x\,dx}{\int \zeta\,dx},$$

ou

$$X = \frac{l}{n}\,\frac{4\zeta_1 . 1 + 2\zeta_2 . 2 + 4\zeta_3 . 3 + \ldots + \zeta_n . n}{\zeta_0 + 4\zeta_1 + 2\zeta_2 + 4\zeta_3 + \ldots + \zeta_n},$$

l désignant la longueur CD, et ξ_0, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, étant les

longueurs des normales telles que MN, menées par les points de la courbe situés sur $n+1$ ordonnées équidistantes, depuis AC jusqu'à BD.

349. Théorème. *La projection sur un plan du centre de gravité* G *d'une portion de surface plane quelconque est le centre de gravité* G' *de la projection de la surface.* Soit Oy (*fig.* 90) la commune intersection des deux plans, A la surface dont il s'agit, A' sa projection, α l'angle des deux plans. La surface A étant partagée en éléments très-étroits par des perpendiculaires à Oy, soit a la surface de l'un de ces éléments et soit a' sa projection. En les considérant comme des parallélogrammes de même hauteur parallèle à Oy, on aura

$$a' = a \cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad A' = A \cos\alpha.$$

Deux éléments correspondants a, a', ont leurs centres de gravité en leurs milieux, et ces milieux, étant sur une même perpendiculaire au plan de projection, ont les mêmes coordonnées x, y, dans le système des trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Cela posé, soient X, Y, les coordonnées de G, X', Y', celles de G', on aura

$$AX = \Sigma ax, \qquad AY = \Sigma ay,$$
$$A'X' = \Sigma a'x, \qquad A'Y' = \Sigma a'y.$$

Or, en substituant pour a' et A' leurs valeurs ci-dessus, et supprimant le facteur constant $\cos\alpha$, on trouve pour X' et Y' des valeurs égales à celles de X et Y, ce qui démontre la proposition.

L'équation $A' = A\cos\alpha$ donne un théorème de géométrie remarquable dont nous nous sommes servis au n° 123.

350. Théorème. *Les centres de gravité de deux lignes, de deux surfaces ou de deux corps géométriques semblables, sont des points homologues.*

On peut (217) supposer les deux figures semblablement placées par rapport à trois axes coordonnés, de manière qu'à tout point de l'une d'elles dont les coordonnées sont x, y, z, réponde, dans l'autre, un point homologue dont les coordonnées sont kx, ky, kz, la constante k étant le rapport de similitude.

Divisons la première ligne, la première surface, ou le premier corps, en éléments égaux entre eux, dont la valeur soit a et le nombre n; soient X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité, nous aurons, comme à la Note du n° 329,

$$X.na = \Sigma ax, \quad Y.na = \Sigma ay, \quad Z.na = \Sigma az;$$

d'où

$$(1) \qquad X = \frac{\Sigma x}{n}, \quad Y = \frac{\Sigma y}{n}, \quad Z = \frac{\Sigma z}{n}.$$

Divisons la seconde ligne ou surface, ou le second corps, en le même nombre n d'éléments égaux, dont la valeur soit a'; et soient X', Y', Z', les coordonnées de son centre de gravité. D'après la remarque faite ci-dessus, nous aurons

$$X'.na' = \Sigma a'.kx, \quad Y'na' = \Sigma a'.ky, \quad Z'na' = \Sigma a'.kz;$$

d'où

$$(2) \qquad X' = \frac{k\Sigma x}{n}, \quad Y' = \frac{k\Sigma y}{n}, \quad Z' = \frac{k\Sigma z}{n}.$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$X' = kX, \quad Y' = kY, \quad Z' = kZ,$$

ce qui démontre la proposition.

§ IV. CENTRES DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

351. Le centre de gravité d'un parallélipipède est en son centre de figure. En général tout corps géométrique ayant

un centre de figure a son centre de gravité en ce point. La raison en est la même qu'au n° 338.

352. *Prisme ou cylindre à bases parallèles quelconques.* Si on le partage en tranches infiniment minces et égales par des plans parallèles aux bases, ces tranches auront leurs centres de gravité uniformément distribués sur une droite parallèle aux arêtes et joignant les centres de gravité des deux bases. Le centre de gravité du système total est donc au milieu de cette droite.

353. Un corps géométrique étant coupé par des plans parallèles, si les centres de gravité des sections, qui diffèrent aussi peu qu'on veut de ceux des tranches, sont dans un même plan ou sur une même droite, ce plan ou cette droite contient le centre de gravité du corps.

354. *Une pyramide et un cône à base quelconque* sont dans le deuxième cas du numéro précédent : car toutes les sections faites par des plans parallèles à la base sont semblables, et ont leurs centres de gravité, points homologues (350), sur une même droite passant par le sommet. Pour déterminer la position du centre de gravité du corps total, on considère le cas d'une pyramide triangulaire. Prenons A (*fig.* 91) pour sommet, le centre de gravité G est sur AI, I étant le centre de gravité de la base, et obtenu en faisant $BE = ED$ et $EI = \frac{1}{3}EC$; de même C étant pris pour sommet, G est sur la droite CH obtenue en faisant $EH = \frac{1}{3}EA$. Ainsi IH est parallèle à AC et $IH = \frac{1}{3}AC$; donc $GI = \frac{1}{3}GA$ ou $GI = \frac{1}{4}AI$. En partageant une pyramide quelconque en pyramides triangulaires ayant même sommet, on voit que les centres de gravité de celles-ci sont

tous dans un plan parallèle à la base, et mené au quart de la hauteur du sommet commun. Donc *le centre de gravité d'une pyramide quelconque*, et par conséquent aussi *d'un cône, est sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base et au quart de cette ligne à partir de la base.*

355. *Remarques.* 1°. Si la *fig.* 91 est l'exacte projection (et non la perspective) de la pyramide qu'elle représente, la projection G du centre de gravité s'obtient en faisant sur les lignes de la figure les mêmes opérations qu'il faudrait faire dans l'espace sur les lignes qu'elles représentent, pour obtenir le centre de gravité lui-même.

2°. Le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est aussi celui de quatre corps égaux dont les centres de gravité seraient placés aux sommets A, B, C, D : car le point I est le centre de gravité des trois corps B, C, D; et le point H est celui des corps A, B, D (40); donc le centre de gravité des quatre corps A, B, C, D, est à la fois sur AI et sur CH; il est, par conséquent, à leur intersection.

356. *Le centre de gravité d'un polyèdre quelconque* peut s'obtenir en le décomposant en pyramides (331).

357. *Centre de gravité d'un secteur sphérique* (*fig.* 92). En considérant le secteur comme composé d'une infinité de pyramides égales, ayant leur sommet commun au centre O et leurs bases sur la calotte ANB, on voit que les centres de gravité de ces pyramides élémentaires sont uniformément répartis sur une seconde calotte *anb* semblable à la première et ayant pour rayon les $\frac{3}{4}$ du rayon OA. Le centre de gravité cherché est donc celui de cette seconde calotte; il est donc au milieu de pn (340).

Donc

$$OG = \frac{1}{2}(Op + On) = \frac{3}{8}(OP + ON).$$

358. *Centre de gravité du segment de paraboloïde de révolution* (*fig.* 93) **engendré par la surface plane M_0MPP_0 tournant autour de Ax.**

Soient une abscisse quelconque $Ap = x$ et l'ordonnée correspondante $mp = y$.

Une tranche infiniment mince $mm'm'_1 m_1$ a pour volume $\pi y^2 dx$, et pour moment par rapport au plan projeté en Ay, $\pi y^2 x dx$. On a donc, en appelant X_1, l'abscisse du centre de gravité, X_0 et X les abscisses extrêmes AP_0, AP,

$$X_1 \int_{x_0}^{X} y^2 dx = \int_{x_0}^{X} y^2 x \, dx;$$

le facteur π disparaît, et cette formule est générale pour tout corps de révolution, quelle que soit la courbe génératrice.

Dans le cas de la parabole dont l'équation est $y^2 = 2ax$, on a

$$\int_{X_0}^{X} 2ax \, dx = a(X^2 - X_0^2),$$

$$\int_{X_0}^{X} 2ax^2 \, dx = \frac{2}{3}a(X^3 - X_0^3),$$

d'où

$$X_1 = \frac{2}{3}\frac{X^3 - X_0^3}{X^2 - X_0^2} = \frac{2}{3}\frac{X^2 + XX_0 + X_0^2}{X + X_0} = \frac{2}{3}\left(X + \frac{X_0^2}{X + X_0}\right).$$

Dans le cas du segment à une base MAM_1, on a $X_0 = 0$, et $X_1 = \frac{2}{3}X = \frac{2}{3}AP$, comme s'il s'agissait du centre de gravité d'un triangle ayant AP pour hauteur. On voit que c'est parce que dans les deux cas les tranches perpendiculaires à AP sont proportionnelles à leurs distances au point A.

359. Lorsque les intégrales du numéro précédent, appli-

cables à un corps de révolution quelconque, ne peuvent être calculées rigoureusement, on emploie la formule de Simpson.

360. Pour obtenir le centre de gravité d'un corps géométrique quelconque compris entre deux plans parallèles yz, YZ (*fig.* 94), dont la distance IK $= l$, on partagera cette distance en un nombre pair n de parties égales; par les points de division on fera, dans le solide, des sections parallèles à yz, et on en calculera les aires A_0, A_1, $A_2, \ldots$, A_n. Le volume du corps sera

$$\frac{l}{3n}(A_0 + 4A_1 + 2A_2 + \ldots + A_n).$$

Son moment par rapport au plan yz sera

$$\frac{l}{3n}\left(4A_1\frac{l}{n} + 2A_2.\frac{2l}{n} + \ldots + A_n\frac{nl}{n}\right);$$

et par conséquent la distance X du centre de gravité au plan yz sera

$$X = \frac{l}{n}\,\frac{4A_1.1 + 2A_2.2 + 4A_3.3 + \ldots + 4A_{n-1}(n-1) + A_n\,n}{A_0 + 4A_1 + 2A_2 + 4A_3 + \ldots + 4A_{n-1} + A_n}.$$

Si les plans yz, YZ, sont tangents, les aires A_0, A_n, sont nulles.

Trois opérations semblables donneront les distances du centre de gravité à trois plans connus.

§ V. DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CENTRES DE GRAVITÉ.

361. *Volume d'un cylindre tronqué* à base quelconque. Si le cylindre est droit sur sa base A (*fig.* 95), soient a un élément de cette base, et a' l'élément correspondant de l'autre base A'; de sorte que a est la projection de a', et l'on a $a = a' \cos\alpha$, $A = A' \cos\alpha$ (349), en désignant par α l'angle dièdre des bases. Soit y la distance entre a' et a; le

volume du petit cylindre ayant pour base a et pour hauteur y sera ay, et le volume entier sera $V = \Sigma ay$, ou bien

$$V = \cos\alpha \Sigma a'y.$$

Or $\Sigma a'y$ est la somme des moments des éléments de la base supérieure par rapport à l'inférieure; donc, en désignant par Y l'ordonnée du centre de gravité de la base supérieure par rapport à l'inférieure, on a

$$\Sigma a'y = A'Y;$$

d'où

$$V = \cos\alpha\, A'.Y = A.Y.$$

Si les arêtes sont obliques sur les deux bases, le cylindre est la différence de deux autres qui rentrent dans le cas précédent, et l'on arrive à cette proposition générale : *Le volume d'un tronc de cylindre est égal à l'aire de sa section droite multipliée par la droite qui joint les centres de gravité des deux bases*, laquelle droite est parallèle aux génératrices rectilignes. *Exemple :* Prisme triangulaire tronqué. La distance des centres de gravité est alors le tiers de la somme des trois arêtes (340, Rem.).

362. La surface de révolution engendrée par une courbe plane quelconque AB (*fig.* 96) se compose de petites zones dont chacune a pour expression $2\pi y\, ds$. Or $y\, ds$ est le moment de l'arc ds par rapport à l'axe; donc, en appelant L la longueur de l'arc AB et Y l'ordonnée de son centre de gravité G, *on a l'aire de la surface de révolution*

$$A = 2\pi \Sigma y\, ds = 2\pi Y.L,$$

égale à la longueur de la courbe génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité. Si la révolution n'est pas complète, il ne faudra prendre pour multiplicateur que l'*arc* décrit par le centre de gravité.

263. Le volume engendré par la révolution d'une surface plane AMBm (*fig.* 97) tournant autour de l'axe KL situé dans son plan se compose de tranches dont chacune peut être considérée comme la différence de deux cylindres.

Soient R et r leurs rayons IP, iP; et soit dx la distance entre Mm et M'm'. Le volume engendré par MM'mm' sera

$$\pi (R^2 - r^2)\, \mathrm{d}x = \pi\, (R + r)\, (R - r)\, \mathrm{d}x.$$

Or $(R - r)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze MM'mm'; soit a cette aire. De plus $\frac{R+r}{2}$ est l'ordonnée gP du centre de gravité de cette aire, sauf une différence à négliger de plus en plus à mesure que dx diminue; soit y cette ordonnée. Le volume élémentaire considéré est $2\pi ay$, c'est-à-dire 2π multipliant le moment ay de la surface élémentaire a par rapport à l'axe KL. Donc, en désignant par A l'aire totale AMBm et par Y la distance de son centre de gravité à l'axe CL, on a *le volume décrit*

$$V = 2\pi \Sigma ay = 2\pi \mathrm{Y}.A,$$

égal à l'aire de la surface génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité. Même modification que ci-dessus si la révolution n'est pas entière.

Ces deux propositions constituent ce qu'on appelle le *Théorème de Guldin.*

§ VI. MOMENTS D'INERTIE ET RAYONS DE GYRATION DES CORPS GÉOMÉTRIQUES.

364. Si l'on partage un corps géométrique en éléments dont les volumes soient u', u'', u''', . . ., et dont les distances

à un axe soient r', r'', r''',..., la somme

$$u'r'^2 + u''r''^2 + u'''r'''^2 + \ldots$$

des produits qu'on obtiendrait en multipliant le volume de chaque élément par le quarré de sa distance à l'axe, est d'une grande importance en Mécanique dans les questions relatives au mouvement de rotation d'un corps solide homogène autour d'un axe fixe auquel aboutissent les distances r.

Cette somme, que nous représentons par Σur^2, et qui dépend non-seulement de la figure et de l'étendue du corps, mais encore de la position de l'axe autour duquel ce corps est supposé tourner, s'appelle le *moment d'inertie du volume* du corps dont il s'agit *autour de cet axe* ou *relativement à cet axe*. On verra en Mécanique l'origine de cette dénomination. La quantité Σur^2 peut toujours être égalée au produit du volume total Σu par le quarré R^2 d'une certaine distance R comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs de r. Cette distance, qui satisfait à l'équation

$$\Sigma ur^2 = R^2 \Sigma u,$$

s'appelle le *rayon de gyration du corps homogène ou de son volume par rapport à l'axe considéré*. Sa détermination est du ressort du calcul intégral. Dans les exemples qui suivent, nous calculerons son quarré, qui entre le plus souvent dans les formules de la Mécanique. Nous le désignerons par R^2 et le moment d'inertie du volume sera représenté par I.

365. La détermination du moment d'inertie du volume d'un corps relativement à un axe quelconque est facilitée par un théorème général, au moyen duquel, quand on connaît le moment d'inertie d'un système solide par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on trouve immédia-

tement celui du même système par rapport à tout autre axe parallèle au premier.

Soient (*fig.* 98) Oz ce premier axe et AB l'autre axe. Menons Ox perpendiculaire à ces deux droites, et Oy perpendiculaire au plan zOx. Soit M un point quelconque du système; appelons x et y ses coordonnées parallèles aux axes Ox, Oy. Ainsi $OP = x$ et $PC = y$. Sa distance MQ ou r_1, à l'axe Oz est égale à OC ou $\sqrt{x^2+y^2}$, et sa distance r à l'axe AB étant égale à AC, on a, en faisant $OA = a$,

$$r^2 = y^2 + (a-x)^2 = y^2 + x^2 + a^2 - 2ax = r_1^2 + a^2 - 2ax,$$

ou, en multipliant par u,

$$ur^2 = ur_1^2 + ua^2 - 2aux,$$

équation applicable à tout volume élémentaire u, pourvu qu'on donne à x le signe convenable, en le faisant négatif quand le point est derrière le plan yOz.

Supposant donc qu'on ait écrit autant d'équations semblables à la dernière qu'il y a d'éléments dans le corps considéré, et les ajoutant, puis remarquant que, puisque Oz passe par le centre de gravité, la somme algébrique Σux est nulle (328), on a

$$\Sigma ur^2 = \Sigma ur_1^2 + a^2 \Sigma u;$$

donc *le moment d'inertie du volume d'un corps, par rapport à un axe quelconque, s'obtient en ajoutant à son moment d'inertie par rapport à un axe mené parallèlement à celui-ci par le centre de gravité, le produit du volume entier par le quarré de la distance des deux axes.*

366. *Moment d'inertie du volume d'une barre droite* AB, d'une longueur l, et d'une très-petite section a, relativement à l'axe Ay, qui fait avec AB l'angle α (*fig.* 99).

Soient

$$AP = x, \quad PP' = dx, \quad PQ = r = x \sin\alpha.$$

On a

$$u = a\,dx\,;$$

$$I = \Sigma ur^2 = \int_0^l a \sin^2\alpha . x^2 dx = a \sin^2\alpha \frac{l^3}{3}\,;$$

$$\Sigma u = al\,;$$

d'où

$$R^2 = \frac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha = \frac{1}{3} BC^2.$$

367. *Moment d'inertie du volume d'une portion d'anneau circulaire* AB, d'une très-petite section a, autour du rayon AO (*fig.* 100).

$$AB = S, \quad MM' = ds, \quad PP' = dx, \quad MP = y, \quad AO = \rho,$$

$$\Sigma ur^2 = \int a\,ds.y^2; \quad ds : dx :: \rho : y;$$

$$\Sigma ur^2 = a\rho \int y\,dx.$$

Or

$$\int y\,dx = \text{aire du segment ABC} = \frac{1}{2}\rho S - \frac{1}{2}\rho^2 \sin\alpha\cos\alpha\,;$$

donc

$$I = \Sigma ur^2 = \frac{1}{2} a\rho^2 \left(S - \frac{1}{2}\rho \sin 2a\right).$$

D'ailleurs $\Sigma u = aS$; donc

$$R^2 = \frac{1}{2}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho}{S} \sin 2a\right).$$

Pour un quart de circonférence on a

$$\sin 2\alpha = 0; \quad I = \frac{1}{2} a\rho^2 S \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Il en est de même pour une demi-circonférence, et pour une circonférence entière.

Le cas particulier du quart de circonférence s'obtient très-simplement comme il suit. Soient Ox et Oy les deux rayons extrêmes. Le moment d'inertie de l'anneau a la même valeur, soit qu'on le prenne autour de Ox, ou autour de Oy. Donc, en appelant x et y les coordonnées d'un point quelconque de l'arc, on a

$$I = \int a y^2 \, ds \quad \text{et} \quad I = \int a x^2 \, ds,$$

d'où

$$2I = a \int (x^2 + y^2) \, ds.$$

Or, dans le cas particulier dont il s'agit, on a aussi

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

donc

$$2I = a\rho^2 \int ds = a\rho^2 S,$$

donc

$$I = \frac{1}{2} a\rho^2 S \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{1}{2}\rho^2.$$

368. *Moment d'inertie du volume d'un disque circulaire* très-mince tournant autour d'un diamètre AB (*fig.* 101). Soient son rayon OA $= \rho$, son épaisseur $= b$. Pour l'anneau élémentaire dont le rayon OM est ξ et la largeur $d\xi$, la quantité $\Sigma u r^2$ serait, d'après le numéro précédent,

$$\frac{1}{2}\xi^2 . 2\pi\xi b \, d\xi;$$

donc pour le disque on a

$$I = \Sigma u r^2 = \pi b \int_0^\rho \xi^3 \, d\xi = \frac{1}{4}\pi b \rho^4.$$

Or

$$\Sigma u = \pi \rho^2 b; \quad \text{donc} \quad R^2 = \frac{1}{4}\rho^2.$$

Autrement. Prenons pour axe des y la droite AB relativement à laquelle on cherche le moment d'inertie du disque, et traçons dans son plan l'axe Ox rectangulaire sur AB.

Appelant x et y les coordonnées d'un élément du disque, la quantité Σur^2 prise autour d'un diamètre quelconque sera exprimée à volonté soit par Σux^2, soit par Σuy^2. On a donc

$$I = \Sigma ux^2 \quad \text{et} \quad I = \Sigma uy^2;$$

d'où, en ajoutant et appelant ξ la distance d'un élément quelconque au centre O, on tire

$$I = \frac{1}{2}\Sigma u(x^2 + y^2), \quad \text{ou} \quad I = \frac{1}{2}\Sigma u\xi^2.$$

Maintenant, pour un anneau élémentaire dont le rayon OM est ξ et la largeur $d\xi$, la quantité $\Sigma u\xi^2$ serait $\xi^2.2\pi b d\xi$. Donc pour le disque entier on a

$$I = \pi b \int_0^\rho \xi^3 d\xi = \frac{1}{4}\pi b \rho^4,$$

comme ci-dessus.

369. *Moment d'inertie du volume d'un cylindre droit à base circulaire* autour de l'axe de figure. Soient son rayon $= \rho$, sa longueur $= l$.

Pour le volume élémentaire compris entre deux surfaces cylindriques dont les rayons sont ξ et $\xi + d\xi$ la quantité Σur^2 serait

$$2\pi\xi d\xi l.\xi^2;$$

donc pour le cylindre entier on a

$$I = 2\pi l \int_0^\rho \xi^3 d\xi = \frac{1}{2}\pi l \rho^4.$$

D'ailleurs

$$\Sigma u = \pi \rho^2 l; \quad \text{donc} \quad R^2 = \frac{1}{2} \rho^2.$$

La même formule finale existe pour un secteur tournant dans son plan autour de son centre.

370. *Moment d'inertie du volume d'une jante à section rectangulaire* par rapport à l'axe de figure. D'après le numéro précédent, on a, en considérant le corps comme la différence de deux cylindres dont les rayons sont ρ et ρ',

$$I = \Sigma ur^2 = \frac{1}{2} \pi l (\rho^4 - \rho'^4);$$

$$\Sigma u = \pi l (\rho^2 - \rho'^2), \quad R^2 = \frac{1}{2} (\rho^2 + \rho'^2).$$

On peut, au lieu des rayons ρ et ρ', introduire le rayon moyen $\rho_1 = \frac{\rho + \rho'}{2}$ et la largeur $b = \rho - \rho'$.

On a

$$4\rho_1^2 = \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho', \quad b^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho';$$

d'où, en ajoutant,

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2\rho_1^2 + \frac{1}{2} b^2:$$

donc

$$R^2 = \rho_1^2 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{b^2}{\rho_1^2}\right).$$

371. *Moment d'inertie d'un cône droit* à base circulaire par rapport à l'axe de figure. Rayon de la base $= \rho$, hauteur $= l$.

Pour un disque élémentaire on aurait (369)

$$\Sigma ur^2 = \frac{1}{2} \pi y^4 dx;$$

donc, pour le cône entier, en mettant pour y sa valeur $\frac{\rho x}{l}$,

$$I = \frac{1}{2}\pi \int y^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi \frac{\rho^4}{l^4}\int_0^l x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{10}\pi\rho^4 l.$$

D'ailleurs le volume

$$\Sigma u = \frac{1}{3}\pi\rho^2 l;$$

donc

$$\mathrm{R}^2 = \frac{3}{10}\rho^2.$$

372. *Moment d'inertie du volume d'un segment sphérique* autour du diamètre perpendiculaire à la base. Rayon de cette base $= \rho$, flèche $= a$.

Pour une tranche élémentaire on aurait (369)

$$\Sigma ur^2 = \frac{1}{2}\pi y^4 \mathrm{d}x.$$

Or

$$y^2 = 2\rho x - x^2;$$

d'où

$$y^4 = 4\rho^2 x^2 - 4\rho x^3 + x^4.$$

Donc pour le segment sphérique on a

$$I = \frac{1}{2}\pi\int_0^a (4\rho^2 x^2 - 4\rho x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{3}\rho^2 a^3 - \rho a^4 + \frac{1}{5}a^5\right).$$

Quant au volume, il est

$$U = \int \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^a (2\rho x - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\rho a^2 - \frac{a^3}{3}\right);$$

d'où

$$\mathrm{R}^2 = \frac{I}{U} = \frac{a}{10}\cdot\frac{20\rho^2 - 15\rho a + 3a^2}{3\rho - a}.$$

Pour une demi-sphère, on a

$$a = \rho, \quad I = \frac{4}{15}\pi\rho^5, \quad R^2 = \frac{2}{5}\rho^2.$$

La même formule finale s'applique à la sphère entière, et on l'obtient directement par un moyen analogue à celui de la fin des nos 367 et 368.

La sphère étant rapportée à trois axes rectangulaires menés par le centre et autour de chacun desquels le moment d'inertie de la sphère entière a la même valeur, on a

$$I = \Sigma u\,(x^2 + y^2),$$
$$I = \Sigma u\,(y^2 + z^2),$$
$$I = \Sigma u\,(z^2 + x^2),$$

d'où, en appelant ξ la distance d'un élément de volume u au centre de la sphère, on conclut

$$3I = 2\Sigma u\,(x^2 + y^2 + z^2), \quad \text{ou} \quad 3I = \Sigma u \xi^2.$$

Pour une couche sphérique dont le rayon est ξ et l'épaisseur $d\xi$ la quantité $\Sigma u\xi^2$ serait $\xi^2 . 4\pi\xi^2 d\xi$. Donc pour la sphère entière on a

$$\Sigma u\xi^2 = 4\pi \int_0^\rho \xi^4 d\xi = \frac{4}{5}\pi\rho^5;$$

donc

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho^5.$$

On a aussi

$$\Sigma u = \frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

donc

$$R^2 = \frac{2}{5}\rho^2.$$

373. *Moment d'inertie d'une calotte sphérique très-*

mince autour du diamètre perpendiculaire à la base. Mêmes données; épaisseur $= b$.

Pour une zone élémentaire on aurait

$$\Sigma ur^2 = 2\pi\rho \mathrm{d}x . by^2,$$

ou

$$2\pi\rho b (2\rho x - x^2)\,\mathrm{d}x;$$

donc pour la calotte on a

$$I = 2\pi\rho b \int_0^a (2\rho x - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\rho b \left(a^2\rho - \frac{a^3}{3}\right).$$

D'ailleurs le volume

$$U = 2\pi\rho a . b;$$

donc

$$R^2 = a\left(\rho - \frac{a}{3}\right).$$

Pour l'hémisphère on a

$$a = \rho, \quad \mathrm{R}^2 = \frac{2}{3}\rho^2.$$

La même formule a lieu pour une couche sphérique entière.

374. *Moment d'inertie d'un corps géométrique quelconque.* Soit O (*fig.* 102) la projection de l'axe de rotation : soient Ox, Oy, des axes coordonnés rectangulaires; u le volume élémentaire dont la position a pour ordonnées x, y. On a

$$ur^2 = (x^2 + y^2).$$

Donc pour le corps entier

$$I = \Sigma ur^2 = \Sigma ux^2 + \Sigma uy^2;$$

chacune de ces deux dernières sommes se calcule séparément.

Soit le solide divisé en tranches comprises entre des

plans infiniment voisins perpendiculaires à l'axe des x. L'aire variable ou constante de la section faite par un de ces plans étant désignée par A, et l'épaisseur de la tranche correspondante étant $\mathrm{d}x$, son volume est $A\mathrm{d}x$; et comme tous ses éléments ont la même abscisse x, la quantité $A\mathrm{d}x.x^2$ sera la valeur de Σux^2 pour toute la tranche. On a donc pour le corps entier

$$\Sigma ux^2 = \int Ax^2\mathrm{d}x,$$

intégrale dont le calcul exact ou approximatif dépendra de l'expression A.

De même, en représentant par B l'aire d'une quelconque des sections faites par les plans perpendiculaires à l'axe des y, on aura

$$\Sigma uy^2 = \int By^2\mathrm{d}y;$$

donc

$$I = \int \mathrm{A}x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{B}y^2\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^2 = \frac{\int \mathrm{A}x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{B}y^2\mathrm{d}y}{\Sigma u}.$$

375. *Moment d'inertie d'un parallélipipède* rectangle, dont les trois arêtes contiguës sont a, b, c autour de l'une de ces arêtes, c.

$$A = bc, \quad \int_0^a Ax^2\mathrm{d}x = bc.\frac{a^3}{3},$$

$$B = ac, \quad \int_0^b By^2\mathrm{d}y = ac.\frac{b^3}{3},$$

donc

$$I = \frac{1}{3}abc\,(a^2 + b^2).$$

De plus le volume

$$\Sigma u = abc,$$

donc

$$R^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2).$$

376. Si l'axe de rotation parallèle au côté c passe par le milieu d'une face ayant b et c pour côtés, le rayon de gyration est le même qu'il serait pour chaque moitié du corps coupé par un plan passant par cet axe. Donc il faut remplacer b par $\frac{1}{2}b$ dans la formule finale précédente, et l'on a

$$R^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{1}{4}b^2\right), \quad \text{et} \quad I = \frac{abc}{3}\left(a^2 + \frac{1}{4}b^2\right).$$

377. Si l'axe parallèle au côté c passe par le centre de figure, on voit par un raisonnement analogue qu'il faut remplacer a et b par $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$ dans la formule du n° 375; on a

$$R^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2) \quad \text{et} \quad I = \frac{abc}{12}(a^2 + b^2).$$

378. *Moment d'inertie d'un ellipsoïde* autour d'un de ses trois diamètres principaux. Les demi-diamètres dirigés suivant Ox, Oy et Oz ont pour longueurs a, b, c. Le moment d'inertie est pris autour de Oz.

La section par un plan perpendiculaire aux x est une ellipse dont les demi-diamètres étant y et z sont des fonction de x, savoir

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'aire A du quart de cette ellipse, projeté en MP, est $\frac{1}{4}\pi yz$; on a donc

$$A = \frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Donc, pour un huitième de l'ellipsoïde, on a

$$\Sigma u x^2 = \int_0^a A x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\frac{bc}{a^2}\int_0^a (a^2 x^2 \mathrm{d}x - x^4 \mathrm{d}x) = \frac{\pi}{30}\cdot a^3 bc.$$

De même, pour cette portion de volume, on a, en remplaçant a par b et réciproquement,

$$\Sigma u y^2 = \frac{\pi}{30} b^3 ac;$$

donc

$$I = \Sigma u r^2 = \frac{\pi}{30}(a^2 + b^2)\, abc.$$

Le volume Σu du huitième de l'ellipsoïde s'obtient en intégrant $\int A \mathrm{d}x$. Ainsi

$$\Sigma u = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{bc}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{\pi}{6} abc;$$

d'où l'on conclut

$$R^2 = \frac{\Sigma u r^2}{\Sigma u} = \frac{1}{5}(a^2 + b^2).$$

S'il s'agit d'un ellipsoïde de révolution, et qu'on ait $a = b$, il en résulte

$$R^2 = \frac{2}{5} a^2,$$

comme pour la sphère (372).

379. *Moment d'inertie d'un cylindre à base parabolique* OPM (*fig.* 103) par rapport à un axe projeté en P, point du diamètre principal. Soient OP $= X$, PM $= Y$, et l'équation de la parabole $y^2 = 2px$. La distance r d'un élément de volume à l'axe P étant ici $\sqrt{(X - x)^2 + y^2}$, on

aura, en raisonnant d'ailleurs comme au n° 374,

$$\Sigma ur^2 = \Sigma u (X - x)^2 + \Sigma uy^2,$$

ou

$$\Sigma ur^2 = \int_0^X A (X - x)^2 \mathrm{d}x + \int_0^X By^2 \mathrm{d}y.$$

En supposant la hauteur du cylindre égale à 1, ce qui ne change rien au rayon de gyration, on a

$$A = y = \sqrt{2px}, \quad B = X - x = X - \frac{y^2}{2p};$$

$$\int_0^X A (X - x)^2 \mathrm{d}x = \sqrt{2p} \int_0^X x^{\frac{1}{2}} (X^2 - 2Xx + x^2) \mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2p} \left(\frac{2}{3} X^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} X^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{7} X^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{16}{105} YX^3,$$

$$\int_0^Y By^2 \mathrm{d}y = \int_0^Y \left(Xy^2 \mathrm{d}y - \frac{y^4}{2p} \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{3} XY^3 - \frac{1}{5} \frac{Y^5}{2p} = \frac{2}{15} XY^3:$$

donc

$$\mathrm{I} = \Sigma ur^2 = \frac{2}{15} XY \left(\frac{8}{7} X^2 + Y^2\right).$$

On a d'ailleurs pour le volume projeté en OMP

$$\Sigma u = \int_0^X A \mathrm{d}x = \sqrt{2p} \int_0^X x^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \sqrt{2p} . X^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} XY.$$

On conclut

$$R^2 = \frac{\Sigma ur^2}{\Sigma u} = \frac{1}{5} \left(\frac{8}{7} X^2 + Y^2\right).$$

380. Lorsque les intégrales $\int Ax^2 \mathrm{d}x$, $\int By^2 \mathrm{d}y$, ne peuvent s'obtenir algébriquement, on emploie la formule de Simpson.

Par exemple, soient (*fig.* 104) le solide compris entre trois plans rectangulaires xOy, xOz, yOz, les plans HL, IL, perpendiculaires à Ox, Oy, et enfin la surface courbe KL. Il s'agit de déterminer le rayon de gyration par rapport à l'axe Oz. On partagera OH = l en un nombre pair n de parties égales, et par les points de division on mènera des sections parallèles à yOz, dont on calculera les aires A_0, A_1, ... On aura approximativement

$$\int A x^2 dx = \frac{l}{3n}\left[4A_1\frac{l^2}{n^2} + 2A_2\left(\frac{2l}{n}\right)^2 + 4A_3\left(\frac{3l}{n}\right)^2 + \ldots + A_n . l^2\right]$$
$$= \frac{l}{3n}\cdot\frac{l^2}{n^2}(4A_1 + 2A_2 2^2 + 4A_3 3^2 + \ldots + A_n . n^2).$$

On opérera de même pour trouver $\int By^2 dy$. Puis, réunissant les deux sommes et divisant par le volume Σu qui sera $\int A dx$ obtenue à l'aide de la même méthode, on aura R^2, quarré du rayon de gyration par rapport à l'axe Oz.

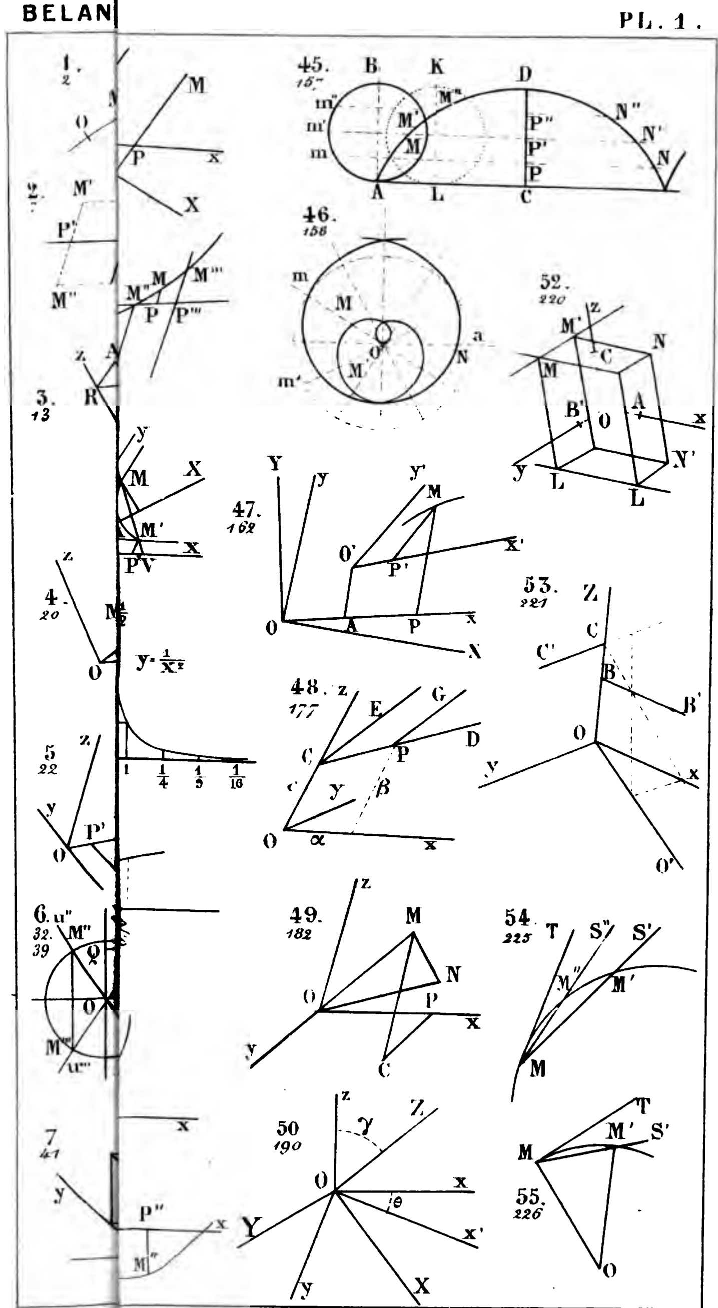
FIN.

LETTRES DE L'ALPHABET GREC

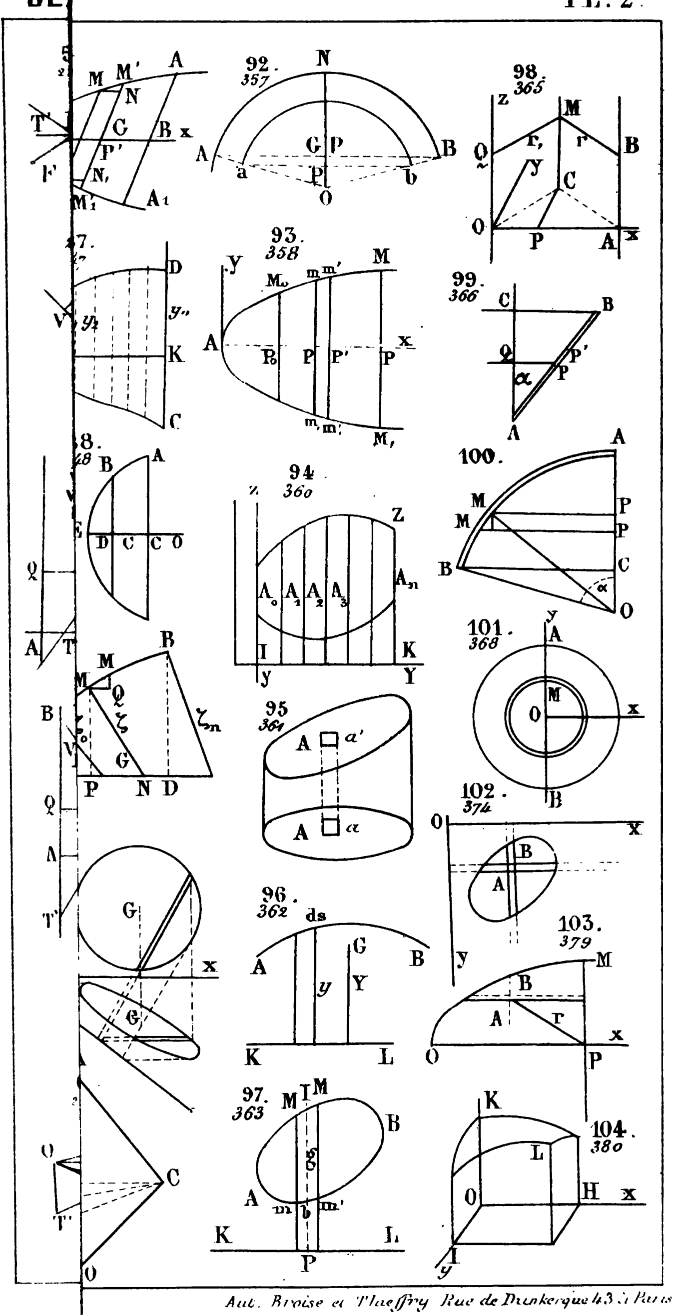
dont on fait usage dans les formules de l'analyse mathématique.

FIGURE.	NOM.	FIGURE.	NOM.
α,	alpha.	Ξ, ξ,	xi.
β, β,	bêta.	Π, π,	pi.
γ,	gamma.	ρ,	rho.
Δ, δ,	delta.	Σ, σ, ς,	sigma.
ε,	epsilon.	τ,	tau.
ζ,	dzêta.	Φ, φ,	phi.
η,	èta.	χ,	ki.
Θ, θ,	thêta.	Ψ, ψ,	psi.
λ,	lambda.	Ω, ω,	oméga.
μ,	mu.		

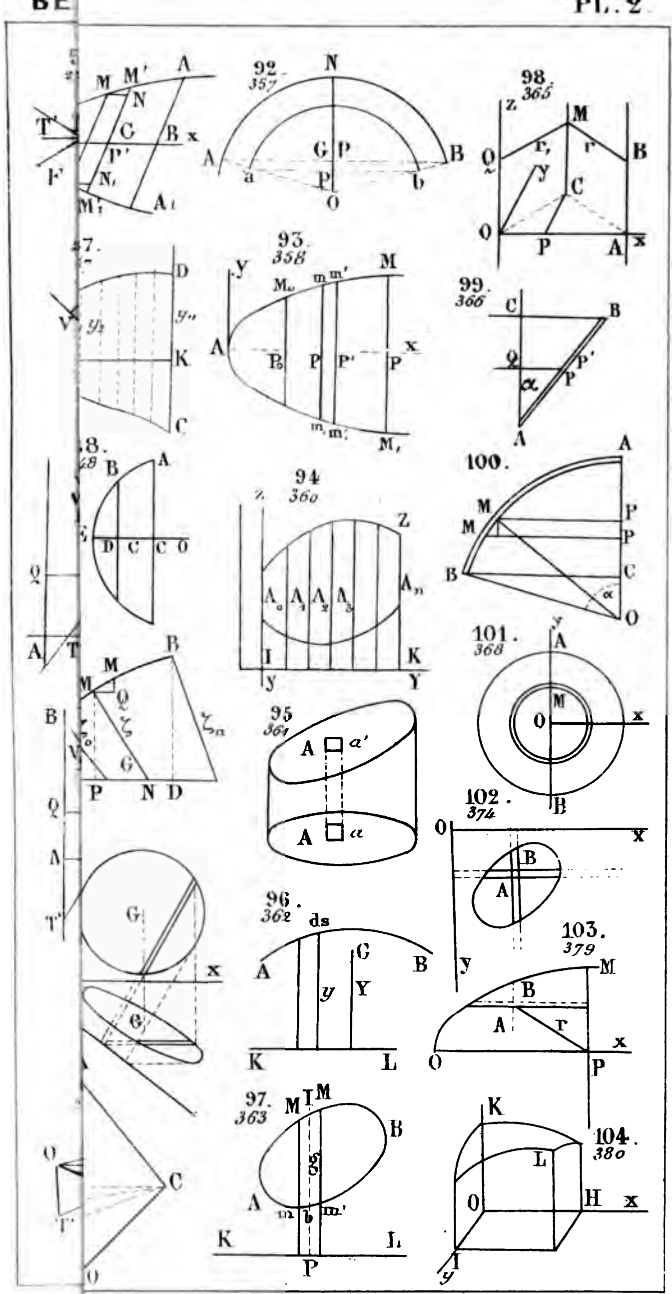
Dans cet ouvrage, la lettre π désigne toujours le rapport de la circonférence au diamètre, et la lette Σ, remplaçant le mot *somme*, annonce en effet la somme de plusieurs quantités analogues. Cette notation diffère du signe $\int$ en ce que celui-ci s'applique à une somme de termes infiniment petits exprimés sous la forme différentielle.



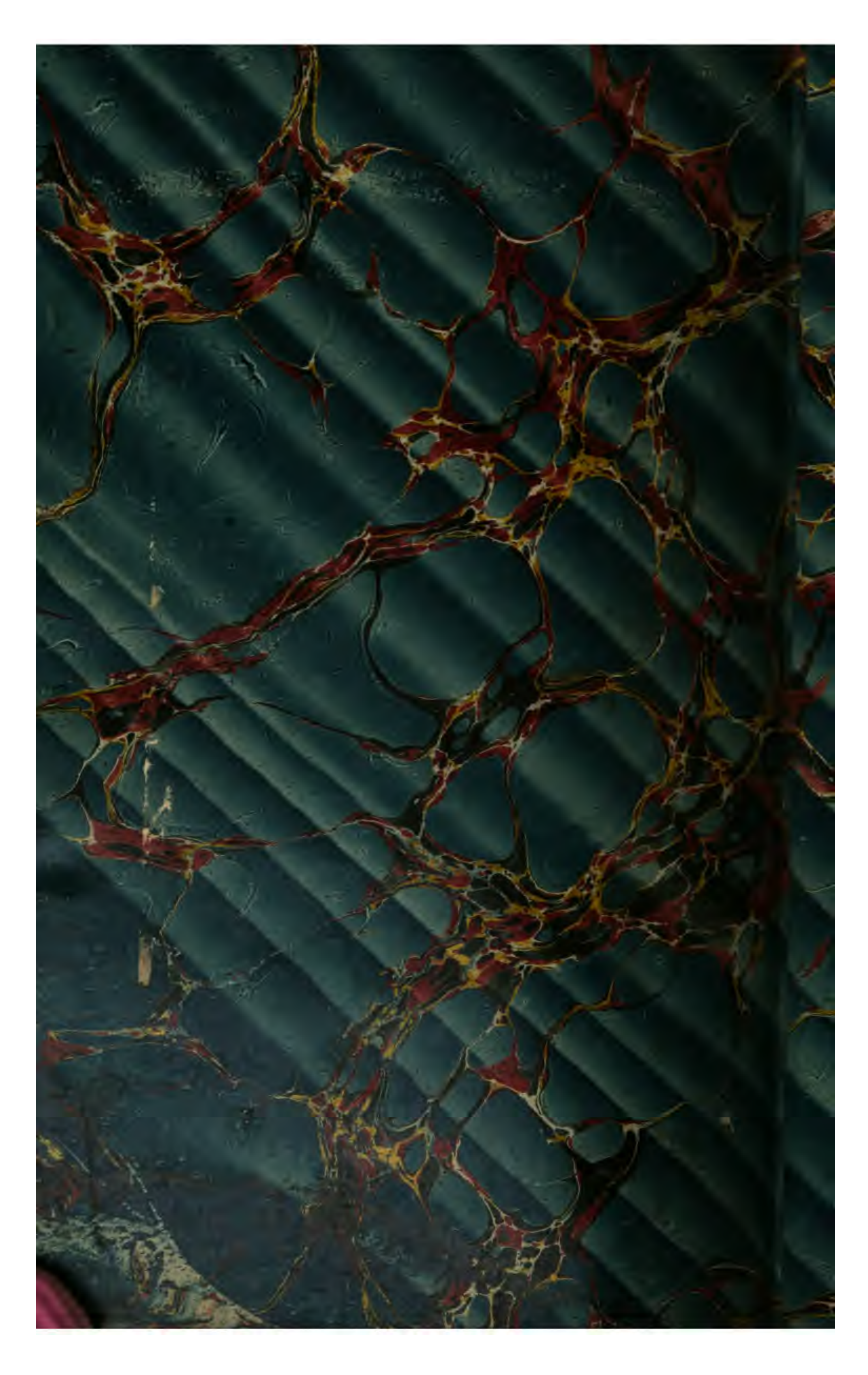
Aut. Broise et Thieffry Rue de Dunkerque 43 à Paris



Aut. Broise et Thieffry Rue de Dunkerque 43 à Paris



Aut. Broise et Thieffry Rue de Dunkerque 43 à Paris




Jan. 4, 93